ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2013

**алгебра,
геометрия,
теория вероятностей
и статистика**

ЛЕГИОН™

9 КЛАСС

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА-9»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА-9»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

9 класс

ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2013

- ✓ Алгебра
- ✓ Геометрия
- ✓ Теория вероятностей и статистика

Учебно-методическое пособие

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2012

ББК 22.14
М 34

Рецензенты:
Н. М. Резникова — учитель высшей категории
С. О. Иванов — аспирант каф. АДМ, ЮФУ
Авторский коллектив:
Лысенко Ф. Ф., Кулабухов С. Ю., Евич Л. Н., Ольховая Л. С.

М 34 Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА- 2013. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика: учебно-методическое пособие / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов н/Д: Легион, 2012. — 315 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0281-0

В книге представлены 24 параграфа по всем темам, отражённым в спецификации государственной итоговой аттестации (ГИА-9): §§1–17 соответствуют базовому уровню сложности, §§18–22 — повышенному уровню сложности, §23 содержит материал по комбинаторике, теории вероятностей, математической статистике, §24 — задачи по геометрии.

Каждый параграф входит в определённую содержательную линию нового стандарта математического образования и включает основные теоретические сведения, соответствующие разделу, демонстрационный вариант с решениями задач и 6 тренировочных вариантов, каждый из которых содержит 8 заданий. Внутри параграфа варианты расположены по возрастанию уровня сложности.

Пособие предназначено для подготовки выпускников 9-х классов общеобразовательных учреждений к ГИА-2013 по математике. Книга адресована учащимся, учителям и методистам.

Пособие является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА-9»**, включающего такие книги, как «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013», «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013. Учебно-тренировочные тесты», «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“» (части 1 и 2) и др.

Замечания и предложения, касающиеся данной книги, можно присылать по почте или на электронный адрес: legionrus@legionrus.com.

Обсудить пособия, оставить замечания и предложения, задать вопросы можно на официальном форуме издательства http://legionr.rossite.org.

Следите за дополнениями и методическими рекомендациями на сайте издательства www.legionr.ru в связи с возможными изменениями спецификаций экзаменационных работ, разрабатываемых ФИПИ (доступ к материалам свободный).

ББК 22.14

ISBN 978-5-9966-0281-0

Оглавление

Тематические тесты

§ 1. Приближённые значения. Округление чисел. Стандартный вид числа

Основные сведения

Правила округления. Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из сохраняющихся цифр увеличивается на 1. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то последняя из сохраняемых цифр остаётся неизменной.

Если число округляют до какого-нибудь разряда, то все следующие за этим разрядом цифры заменяют нулями, а если они стоят после запятой, то их отбрасывают.

Стандартным видом положительного числа a называют его представление в виде $a_0 \cdot 10^m$, где $1 \leqslant a_0 < 10$, а m — целое число; число m называют **порядком числа** a, число a_0 — **мантиссой**.

Погрешностью приближения (абсолютной погрешностью) называют модуль разности между точным значением величины x и её приближённым значением a.

Если a — приближённое значение числа x и $|x - a| \leqslant h$, то говорят, что число x равно числу a с точностью до h, и пишут: $\boldsymbol{x = a \pm h}$.

Неравенство $|x - a| \leqslant h$ можно записать в виде $a - h \leqslant x \leqslant a + h$. Числа $a-h$ и $a+h$ являются приближёнными значениями числа x **с недостатком и с избытком** соответственно.

Относительной погрешностью приближённого значения a называют отношение абсолютной погрешности $|x - a|$ к модулю приближённого значения. Относительную погрешность выражают в процентах $\dfrac{|x-a|}{|a|} \cdot 100\%$.

Демонстрационный вариант

1. Округлите число 57 497 до сотен.

   1) 58 000 2) 58 497 3) 57 500 4) 60 000

Решение. При округлении числа 57 497 до сотен следует написать 57500. Действительно, за цифрой 4, обозначающей разряд сотен, следует цифра 9. Следовательно, 4 нужно увеличить на 1, а все цифры, стоящие правее данного разряда, заменить нулями. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Диаметр планеты Юпитер приближённо равен 142600 км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}426 \cdot 10^4$ км 2) $1{,}426 \cdot 10^2$ км
3) $1{,}426 \cdot 10^5$ км 4) $1{,}426 \cdot 10^6$ км

Решение. $142600 = 1{,}426 \cdot 10^5$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Толщину одной и той же детали измерили штангенциркулем, микрометром и линейкой. Получили соответственно результаты 2,6 мм, 2,49 мм и 2 мм. Каким инструментом было произведено более точное измерение, если толщина детали равна 2,5 мм?

1) штангенциркулем 2) микрометром
3) линейкой 4) всеми инструментами

Решение. Найдём абсолютную погрешность для каждого из приведённых измерений:

1) при измерении штангенциркулем: $|2{,}6 - 2{,}5| = 0{,}1$;

2) при измерении микрометром: $|2{,}49 - 2{,}5| = 0{,}01$;

3) при измерении линейкой: $|2 - 2{,}5| = 0{,}5$.

Из чисел 0,1; 0,01 и 0,5 наименьшее — 0,01. Следовательно, более точное измерение было произведено микрометром. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Найдите погрешность приближения числа $\frac{5}{6}$ десятичной дробью 0,8.

1) $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{30}$ 3) 0,3 4) 0,33

Решение. $\left|\frac{5}{6} - 0{,}8\right| = \left|\frac{5}{6} - \frac{4}{5}\right| = \frac{1}{30}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 14{,}7$ и $b = 14{,}724$.

1) $\frac{8}{49}\%$ 2) $-0{,}024\%$ 3) $0{,}24\%$ 4) $-\frac{8}{49}\%$

Решение. $\dfrac{|b-a|}{|a|}\cdot 100\% = \dfrac{|14{,}724-14{,}7|}{14{,}7}\cdot 100\% = \dfrac{2{,}4}{14{,}7}\% = \dfrac{8}{49}\%$.
Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Температура t воздуха в холодильной камере $7{,}5°C$. В качестве приближенного значения взято число $7°C$. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Решение. $|7{,}5-7| = 0{,}5$.

Ответ: 0,5.

7. Пусть $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$. Из чисел
А $= 12{,}91$ Б $= 12{,}95$ В $= 12{,}501$ Г $= 12{,}52$
выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Б 3) Б, В 4) В, Г

Решение. Запись $x = 12{,}7 \pm 0{,}2$ означает, что x равно 12,7 с точностью до 0,2, то есть $12{,}7-0{,}2 \leqslant x \leqslant 12{,}7+0{,}2$. Отсюда $12{,}5 \leqslant x \leqslant 12{,}9$. Полученному неравенству удовлетворяют только числа В и Г. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Укажите приближённое значение числа b, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $5{,}8 \leqslant b \leqslant 6{,}4$.

Решение. Числа 5,8 и 6,4 являются приближёнными значениями числа b с недостатком и с избытком соответственно. Среднее арифметическое этих чисел равно $\dfrac{5{,}8+6{,}4}{2} = 6{,}1$.

Ответ: 6,1.

Вариант № 1

1. Округлите число 253,355 до десятых.

1) 253,4 2) 253,3 3) 253,25 4) 253,26

2. Расстояние от планеты Земля до Солнца равно 149,6 млн км. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}496\cdot 10^6$км 2) $1{,}496\cdot 10^7$км 3) $1{,}496\cdot 10^8$км 4) $1{,}496\cdot 10^9$км

3. Велосипедист проехал дистанцию 47 км со средней скоростью 9 км/ч. За сколько минут велосипедист преодолел дистанцию? Ответ округлите до целых.

1) 522 2) 313 3) 11 4) 423

4. Выразите дробь $\frac{5}{11}$ приближённой десятичной дробью с тремя знаками после запятой.

1) 0,454 2) 0,455 3) 0,450 4) 0,500

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 230$, $b = 234{,}5$.

1) $\frac{2}{9}\%$ 2) $-\frac{45}{23}\%$ 3) $\frac{45}{23}\%$ 4) $-4{,}5\%$

6. Стену, длина которой 3,6 м, а высота — 2,7 м, решили оклеить обоями. Сколько рулонов обоев надо купить, чтобы оклеить стену, если ширина обоев в рулоне — 60 см, а длина — 10 м?

Ответ: ______

7. Пусть $x = 24{,}71 \pm 1{,}2$. Из чисел
А = 24,73, Б = 26,71, В = 23,21, Г = 25,91
выберите возможные значения x.

1) А, В 2) А, Г 3) Б, В 4) В, Г

8. Укажите приближённое значение числа a, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если
$17{,}13 \leqslant a \leqslant 17{,}21$.

Ответ: ______

Вариант № 2

1. Найдите десятичную дробь, равную $21{,}35 \cdot 10^{-6}$.

1) 0,02135 2) 0,002135 3) 0,00002135 4) 0,0000002135

2. Общее количество биомассы Мирового океана оценивается в 35 миллиардов тонн. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $35 \cdot 10^6$ т 2) $35 \cdot 10^9$ т 3) $3{,}5 \cdot 10^8$ т 4) $3{,}5 \cdot 10^{10}$ т

3. На рулетке написано: $l = 5{,}2 \pm 0{,}015$ м. Как это условие можно записать в виде двойного неравенства?

1) $4{,}995 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 2) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}315$
3) $5{,}195 \leqslant l \leqslant 5{,}215$ 4) $5{,}185 \leqslant l \leqslant 5{,}215$

4. Технические данные настольных «быстрых» весов допускают погрешность при взвешивании не более ±0,04кг. Какой может быть масса взвешиваемого продукта при данном условии, если требуется взвесить 1 кг?

1) 1,4 кг 2) 1,05 кг 3) 0,97 кг 4) 0,94 кг

5. Укажите, какую наименьшую длину может иметь отрезок числовой оси, содержащий числа $8-\sqrt{3}$; $2+\sqrt{10}$; $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$, если его концы обязаны быть целыми числами.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

6. Сравните значения выражений $b = \frac{a+1}{\sqrt{a^2-1}}$ и $c = \frac{1}{a-1}$, если известно, что $1 < a < 1{,}4$.

1) $b < c$ 2) $b > c$
3) $b = c$ 4) для сравнения не хватает данных

7. На коробке с тортом имеется надпись, гарантирующая, что масса торта равна 500 ± 12 г . Какую массу при этом условии не может иметь торт?

1) 486 г 2) 507 г 3) 512 г 4) 499 г

8. При $x = -0{,}3$ найдите значения выражений $M = 0{,}4x$, $N = -x^2$ и $P = \frac{0{,}1}{x}$ и расположите их в порядке возрастания.

1) P, M, N 2) M, N, P 3) N, M, P 4) M, P, N

Вариант № 3

1. Округлите число 3210,2878 до тысячных.

1) 3000 2) 3210,3 3) 3210,29 4) 3210,288

2. Площадь бассейна реки Амур составляет 1855 тыс. км^2. Как эта величина записывается в стандартном виде?

1) $1{,}855 \cdot 10^3$ км^2 2) $1{,}855 \cdot 10^4$ км^2
3) $1{,}855 \cdot 10^5$ км^2 4) $1{,}855 \cdot 10^6$ км^2

3. Мальчик на вопрос о том, сколько километров составляет расстояние между Москвой и Петербургом, ответил: «675 км», а девочка ответила: «630 км». Какой ответ точнее, если расстояние между городами 650 км?

Ответ: ______

4. Найдите погрешность приближения числа $\frac{2}{3}$ десятичной дробью 0,7.

1) $\frac{1}{30}$ 2) $-\frac{1}{30}$ 3) 0,04 4) −0,04

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 15,3$, $b = 15,347$.

1) $-\frac{47}{153}\%$ 2) 0,47% 3) −0,047% 4) $\frac{47}{153}\%$

6. Длина отрезка ℓ равна 15 см. В качестве приближенного значения длины взято число 15,5 см. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Ответ: ______

7. Пусть $x = 8,7 \pm 0,4$. Из чисел

А) 8,223 Б) 8,341 В) 9,023 Г) 9,2

выберите возможные значения x.

1) А, В 2) Б, В 3) Б, Г 4) В, Г

8. Укажите приближённое значение числа m, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $3,9 \leqslant m \leqslant 4,3$.

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Округлите число 4218,9 до десятков.

1) 4219 2) 4220 3) 42000 4) 4000

2. Запишите число 0,000218 в стандартном виде.

1) $21,8 \cdot 10^{-5}$ 2) $0,218 \cdot 10^{-3}$ 3) $2,18 \cdot 10^{-4}$ 4) $218 \cdot 10^{-6}$

3. Найдите приближённо разность чисел $a = 67,1234$ и $b = -22,6789$, округлив её с точностью до сотых.

1) 44,44 2) 44,0 3) 89,80 4) 89,802

4. Найдите погрешность приближения числа $\frac{2}{7}$ десятичной дробью 0,3.

1) $\frac{1}{70}$ 2) $-\frac{1}{70}$ 3) 0,14 4) −0,14

5. Пусть a — приближённое значение числа b. Найдите относительную погрешность, если $a = 27,4$ и $b = 27,418$.

1) −0,18% 2) $\frac{9}{137}\%$ 3) $-\frac{9}{137}\%$ 4) 0,18%

6. Округлите число a до третьей значащей цифры, если $a = 3,75231$.

1) 3,8 2) 3,75 3) 3,752 4) 4

7. Пусть $z = 9,2 \pm 0,3$. Из чисел

$А = 9,3$ $Б = 9,7$ $В = 8,96$ $Г = 8,17$

выберите возможные значения z.

1) Б, Г 2) А, Б 3) А, Г 4) А, В

8. Укажите приближённое значение числа k, равное среднему арифметическому приближений с недостатком и с избытком, если $4,1 \leqslant k \leqslant 4,3$.

Ответ: ______

Вариант № 5

1. Округлите число 12346 до сотен.

1) 10000 2) 12000 3) 12300 4) 12350

2. Стандартный вид числа 0,000801 имеет представление:

1) $8{,}01 \cdot 10^{-4}$ 2) $0{,}801 \cdot 10^{-3}$ 3) $0{,}0801 \cdot 10^{-2}$ 4) $801 \cdot 10^{-6}$

3. Марина на уроке литературы сказала: «Расстояние от Простоквашино до Грибного — 1796 м>, а Маша её поправила: «Нет, расстояние между этими населёнными пунктами — 1801 м». Какой ответ точнее: 1796 м или 1801 м, если расстояние — 1799 м?

Ответ: ______

4. Определите погрешность вычислений $2\frac{1}{3} + \frac{5}{6} \approx 3{,}15$.

1) $\frac{1}{60}$ 2) $-\frac{1}{60}$ 3) 0,017 4) −0,017

5. Известно, что $a + b \approx 8{,}8$. Определите погрешность приближения, если $a = 21{,}567$, $b = -12{,}78$.

1) 0,013 2) −0,013 3) 0,13 4) −0,13

6. Масса m макарон в пакете 0,8 кг. В качестве приближённого значения взята масса 0,9 кг. Найдите абсолютную погрешность приближения.

Ответ: ______

7. Известно, что x может принимать значения 5,782, 4,138 и 5,053. Найдите из формулы $x = y \pm a$ такое приближение y, чтобы погрешность a была минимальна.

1) 5,053 2) 4,991 3) 5,025 4) 4,96

8. Укажите все значения, которые может принимать число x, если его приближённое значение равно 7,13, а абсолютная погрешность равна 0,04.

1) $-7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}09$ 2) $7{,}09 \leqslant x \leqslant 7{,}17$
3) $-7{,}17 \leqslant x \leqslant 7{,}17$ 4) $-7{,}13 \leqslant x \leqslant 7{,}13$

Вариант № 6

1. Найдите десятичную дробь, равную $\frac{9}{750}$.

1) 1,2 2) 0,12 3) 0,012 4) 0,0012

2. Площадь Васиной квартиры составляет 65 м^2. Выразите эту площадь в км^2.

1) 0,006 5 км^2 2) 0,000 65 км^2
3) 0,000 065 км^2 4) 0,000 006 5 км^2

3. Стоимость автомобиля равна 200 000 руб±50 000 руб. в зависимости от модификации. Какую цену не может заплатить покупатель при указанном условии?

1) 230 000 2) 200 000 3) 280 000 4) 180 000

4. Стандартный вид числа 0,000 004 1 имеет представление:

1) $0{,}041 \cdot 10^{-4}$ 2) $0{,}41 \cdot 10^{-5}$ 3) $4{,}1 \cdot 10^{-6}$ 4) $41 \cdot 10^{-7}$

5. Абсолютная погрешность измерений, сделанных с помощью весов, не более 1,6 г. Взвесили сахар. Весы показали 550 г. Какую массу в действительности не может иметь этот сахар?

1) 551 г 2) 551,7 г 3) 548,7 г 4) 550 г

6. Найдите сумму целых чисел, между которыми заключено число $4\sqrt{11}$.

1) 27 2) 25 3) 13 4) 29

7. На сайте прогноза погоды говорится, что влажность воздуха составит завтра 70 ± 15 %. Какой влажности воздуха по прогнозу завтра не будет?

1) 70% 2) 55% 3) 85% 4) 90%

8. На рисунке 1 изображен график функции $y = g(x)$. Используя график, сравните значения $g(-3{,}5)$ и $g(3{,}5)$.

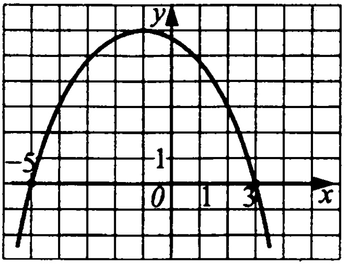


Рис. 1.

1) $g(-3{,}5) < g(3{,}5)$ 2) $g(-3{,}5) > g(3{,}5)$
3) $g(-3{,}5) = g(3{,}5)$ 4) другой ответ

§ 2. Отношения. Пропорции

Основные сведения

Отношение двух чисел — это частное от деления одного из них на другое. Отношение показывает, во сколько раз первое число больше второго или какую часть первое число составляет от второго.

Если значения двух величин выражены разными единицами измерения, то для нахождения отношения этих величин надо предварительно перейти к одной единице измерения.

Взаимно обратными называют числа, произведение которых равно 1 $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=1\text{, где } a\neq 0,\ b\neq 0\right)$.

Обратное отношение — это отношение, взятое в обратном порядке по отношению к данному.

Отношение $\frac{b}{a}$ называют обратным отношению $\frac{a}{b}$.

Пропорция — это равенство двух отношений.

В пропорции $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ (или $a:b=c:d$) числа a и d называют **крайними**, а числа b и c — **средними** членами пропорции.

Основное свойство пропорции. В верной пропорции произведение крайних членов равно произведению её средних членов.
Если для двух отношений $\boldsymbol{a:b}$ и $\boldsymbol{c:d}$ выполняется равенство $\boldsymbol{ad=bc}$, то $\boldsymbol{a:b=c:d}$ — верная пропорция.

Если в верной пропорции поменять местами средние или крайние члены, то получившиеся новые пропорции верны.

Демонстрационный вариант

1. Отношение c к d равно $\frac{7}{9}$. Найдите их обратное отношение.

1) $-\frac{7}{9}$ 2) $1\frac{2}{7}$ 3) 0,8 4) 1,4

Решение. Отношением, обратным к $\frac{7}{9}$, является $\frac{9}{7}=1\frac{2}{7}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Масса печенья 15 кг, а масса упаковки 600 г. Найдите отношение массы печенья к массе упаковки.

1) $\frac{15}{600}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{1}{25}$ 4) 25

Решение. 600 г = 0,6 кг. Отношение массы печенья к массе упаковки равно $\frac{15}{0{,}6} = \frac{150}{6} = 25$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Из каких отношений

А = 4,8 : 0,9; Б = 1,6 : 0,3; В = 0,48 : 0,9; Г = 25 : 12

можно составить пропорцию?

1) А и Б 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

Решение. Проверим предложенные отношения на выполнение основного свойства пропорции.

1) Для отношений А и Б произведение крайних членов $4{,}8 \cdot 0{,}3 = 1{,}44$; произведение средних членов $0{,}9 \cdot 1{,}6 = 1{,}44$; $1{,}44 = 1{,}44$. Следовательно, из этих отношений можно составить пропорцию.

2) Для отношений Б и В произведение крайних членов $1{,}6 \cdot 0{,}9 = 1{,}44$; произведение средних членов $0{,}3 \cdot 0{,}48 = 0{,}144$; $1{,}44 \neq 0{,}144$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

3) Для отношений А и В произведение крайних членов $4{,}8 \cdot 0{,}9 = 4{,}32$; произведение средних членов $0{,}9 \cdot 0{,}48 = 0{,}432$; $4{,}32 \neq 0{,}432$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

4) Для отношений Б и Г произведение крайних членов $1{,}6 \cdot 12 = 19{,}2$; произведение средних членов $0{,}3 \cdot 25 = 7{,}5$; $19{,}2 \neq 7{,}5$. Следовательно, из этих отношений нельзя составить пропорцию.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

4. Из пропорции $20 : 15 = 16 : 12$ составлены 4 равенства, укажите верное.

1) $15 : 20 = 16 : 12$ 2) $20 : 12 = 15 : 16$

3) $12 : 16 = 15 : 20$ 4) $20 : 16 = 12 : 15$

Решение. Заданная пропорция останется верной, если в ней поменять местами средние или крайние члены. Следовательно, из предложенных пропорций верной является только 3).

Ответ: 3.

5. Какое из перечисленных ниже равенств отношений составлено неверно, если $13 \cdot 6 = 0{,}78 \cdot 100$?

1) $13 : 6 = 0{,}78 : 100$ 2) $13 : 100 = 0{,}78 : 6$
3) $6 : 100 = 0{,}78 : 13$ 4) $13 : 0{,}78 = 100 : 6$

Решение. Из заданного равенства произведений на основе перестановки сомножителей и основного свойства пропорции можно составить четыре верные пропорции: $13 : 0{,}78 = 100 : 6$; $6 : 0{,}78 = 100 : 13$; $13 : 100 = 0{,}78 : 6$; $6 : 100 = 0{,}78 : 13$.

Следовательно, из предложенных ответов неверным равенством является 1).

Ответ: 1.

6. На пошив 9 рубашек ушло 18,9 м ткани. Сколько метров такой же ткани потребуется на пошив 15 рубашек?

1) 27 2) 35 3) 31,5 4) 30

Решение. Пусть на пошив 15 рубашек требуется x м ткани. Тогда, согласно условию,

9 рубашек — 18,9 м;
15 рубашек — x м

Так как расход ткани **прямо пропорционален** количеству рубашек, то справедливо равенство $\frac{9}{15} = \frac{18{,}9}{x}$. По правилу нахождения крайнего члена пропорции $x = \frac{15 \cdot 18{,}9}{9} = 31{,}5$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. С помощью 6 одинаковых труб бассейн заполняется водой за 32 минуты. За сколько минут можно заполнить бассейн с помощью 8 таких труб?

1) 36 2) 42 3) 64 4) 24

Решение. Пусть с помощью 8 труб бассейн можно заполнить за x минут. Тогда, согласно условию,

6 труб — 32 мин;
8 труб — x мин.

Так как время заполнения бассейна **обратно пропорционально** количеству труб, то справедливо равенство $6 : 8 = x : 32$. По правилу нахождения среднего члена пропорции $x = \frac{6 \cdot 32}{8} = 24$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Угол в 140° разделен на 4 части, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 4 : 5. Найдите градусную меру меньшего из полученных углов.

1) 10° 2) 20° 3) 70° 4) 120°

Решение. Пусть x — градусная мера одной части. Тогда градусные меры углов соответственно равны $2x$, $3x$, $4x$ и $5x$. Следовательно, $2x + 3x + 4x + 5x = 140$; $14x = 140$; $x = 10$; 10° приходится на одну часть. Градусная мера меньшего из полученных углов равна $2 \cdot 10° = 20°$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

Вариант № 1

1. Отношение a к b равно $-\frac{3}{5}$. Найдите обратное отношение.

1) $\frac{3}{5}$ 2) $-\frac{12}{5}$ 3) $\frac{5}{3}$ 4) $-\frac{5}{3}$

2. Ширина комнаты — 3,2 м, а длина — 480 см. Найдите отношение ширины комнаты к её длине.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{384}{25}$ 4) $\frac{25}{384}$

3. Выберите пару отношений, из которых можно составить пропорцию.

1) $\frac{15}{3}$ и $\frac{5}{0,3}$ 2) $\frac{14}{4}$ и $\frac{0,7}{0,2}$ 3) $\frac{11}{10}$ и $\frac{10}{11}$ 4) $\frac{2,3}{4,6}$ и $\frac{1}{4}$

4. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{5,4}{x} = \frac{2,7}{2,1}$, используя её основное свойство.

1) 2 2) 2,1 3) 2,7 4) 4,2

5. Выберите отношение b к a, если $1,5b = 3,2a$.

1) $\frac{b}{a} = \frac{24}{5}$ 2) $\frac{b}{a} = \frac{5}{24}$ 3) $\frac{b}{a} = \frac{1,5}{3,2}$ 4) $\frac{b}{a} = \frac{3,2}{1,5}$

6. Для участия в соревнованиях класс разбили на четыре равные команды. При этом в первую команду попали только девочки, во вторую и третью — только по одному мальчику (остальные девочки), а в четвёртую — две девочки (остальные мальчики). Найдите, какую часть составляют девочки от количества всех учеников в классе.

1) $\frac{3}{4}$ 2) $\frac{1}{2}$ 3) $\frac{1}{4}$ 4) $\frac{2}{3}$

7. Скорость велосипедиста во столько же раз выше скорости пешехода, во сколько раз скорость велосипедиста меньше скорости мотоциклиста. Найдите отношение скорости велосипедиста к скорости мотоциклиста, если известно, что скорость пешехода в 25 раз меньше скорости мотоциклиста.

1) $\frac{1}{2}$ 2) $\frac{1}{5}$ 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{4}$

8. В детской игрушке «Пирамида», состоящей из 5 колец, «внутренний» диаметр каждого последующего кольца меньше диаметра предыдущего кольца в 2,5 раза. Найдите отношение диаметра пятого кольца к диаметру второго кольца.

1) $\frac{2}{5}$ 2) $\frac{5}{2}$ 3) $\frac{8}{125}$ 4) $\frac{4}{25}$

Вариант № 2

1. Земельный участок площадью 210 га засеян семенами подсолнечника и льна. Площади под засев относятся как 4 : 3 соответственно. Какая площадь отведена под лён (в га)?

1) 150 2) 60 3) 120 4) 90

2. Неизвестный член пропорции $3{,}6 : x = \frac{1}{5} : \frac{4}{9}$ равен

1) 18 2) 0,32 3) 8 4) другой ответ

3. Известно, что $\frac{4{,}5}{x} = \frac{3}{5}$, тогда x равен

1) 7,5 2) 2,7 3) 27 4) 75

4. Для пайки изделий из жести применяют сплав, состоящий из свинца и олова в отношении 2 : 5. Сколько понадобится олова для приготовления 350 г сплава?

1) 50 2) 100 3) 250 4) 300

5. Чтобы сшить 5 брюк, требуется 6 м ткани. Сколько таких брюк получится из 9,6 м этой ткани?

1) 7 2) 8 3) 9 4) 6

6. Укажите для пропорции $3x : 4y = 2z : 5t$ верное равенство.

1) $3xz = 10yt$ 2) $6xy = 5tz$ 3) $15xt = 8yz$ 4) $3x = 2z$

7. Один метр ткани стоит x рублей. Сколько копеек стоит y сантиметров этой ткани?

1) $\frac{xy}{10}$ 2) $100xy$ 3) $\frac{xy}{100}$ 4) xy

8. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Отношение a к b равно $\frac{5}{4}$. Найдите обратное отношение.

1) $1\frac{1}{4}$ 2) $-\frac{4}{5}$ 3) 0,8 4) $1\frac{1}{5}$

2. Масса конфет — 2 кг, а масса печенья — 800 г. Найдите отношение массы печенья к массе конфет.

1) $\frac{800}{2}$ 2) $\frac{2}{800}$ 3) $\frac{20}{8}$ 4) $\frac{2}{5}$

3. Из каких отношений

$А = 1{,}2 : 10$; $Б = 8{,}4 : 14$; $В = 0{,}75 : 6\frac{1}{4}$; $Г = 8{,}4 : 1{,}4$

можно составить пропорцию?

1) А и Г 2) Б и В 3) А и В 4) Б и Г

4. Из пропорции $15 : 5 = 18 : 6$ составлены четыре равенства. Укажите, какое из них является верным.

1) $5 : 15 = 6 : 18$ 2) $18 : 15 = 5 : 6$
3) $15 : 6 = 5 : 18$ 4) $18 : 5 = 6 : 15$

5. Из равенства произведений $7 \cdot 15 = 10{,}5 \cdot 10$ составлены верные равенства. Укажите их.

1) $7 : 10 = 10{,}5 : 15$ 2) $10 : 7 = 15 : 10{,}5$
3) $7 : 10{,}5 = 10 : 15$ 4) $15 : 10{,}5 = 7 : 10$

1) 1, 2, 4 2) 1, 3, 4 3) 2, 3, 4 4) 1, 2, 3

6. Из 13,2 м шёлка сшили 4 сарафана. Сколько таких сарафанов сошьют из 23,1 м такой ткани?

1) 3,3 2) 7 3) 3 4) 9

7. Для строительства стадиона 5 бульдозеров расчистили площадку за 2 часа 20 минут. За какое время 7 таких бульдозеров расчистят эту площадку?

1) $\frac{7}{5}$ ч 2) 3 ч 60 мин 3) 1 ч 40 мин 4) 3 ч 16 мин

8. Известно, что градусные меры углов $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ четырёхугольника относятся как $1 : 2 : 3 : 4$ соответственно. Найдите градусную меру угла C.

1) 144° 2) 108° 3) 72° 4) 36°

Вариант № 4

1. Найдите отношение $\frac{7}{4}$ к $\frac{21}{39}$.

1) $\frac{147}{156}$ 2) 3,45 3) $\frac{121}{169}$ 4) 3,25

2. Масса колбасы — 4 кг, а масса сосисок — 600 г. Найдите отношение массы сосисок к массе колбасы.

1) $\frac{2000}{3}$ 2) $\frac{3}{20}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{3}{2000}$

3. Из каких отношений

А) $\frac{2}{3}$ и $\frac{14}{41}$ Б) $2 : 3$ и $14 : 42$ В) $4 : 3$ и $64 : 12$ Г) $5 : 4$ и $25 : 20$

можно составить пропорцию?

1) А 2) Б 3) В 4) Г

4. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{3}{x} = \frac{21}{42}$.

1) 8 2) 5 3) 6 4) 4

5. Из равенства произведений $6 \cdot 12 = 4{,}5 \cdot 16$ составили верную пропорцию. Укажите её.

1) $\frac{6}{45} = \frac{12}{16}$ 2) $\frac{16}{12} = \frac{4{,}5}{6}$ 3) $\frac{12}{16} = \frac{4{,}5}{6}$ 4) $\frac{6}{4{,}5} = \frac{12}{16}$

6. Из 24-х метров ткани сшили 6 костюмов. Сколько метров такой же ткани потребуется на шитьё 5 костюмов?

1) 20 2) 15 3) 25 4) 30

7. Для переноса мебели в школу 6 ребятам потребовалось 1 час 12 мин. Сколько времени потребуется 9 ребятам для переноса той же мебели в школу?

1) 52 мин 2) 50 мин 3) 1 час 40 мин 4) 48 мин

8. Известно, что величины углов $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ треугольника относятся как 6 : 5 : 7 соответственно. Найдите градусную меру $\angle A$.

1) 50° 2) 60° 3) 70° 4) 80°

Вариант № 5

1. Найдите отношение, обратное отношению числа 20 к числу 7.

1) $2\frac{6}{7}$ 2) $-\frac{20}{7}$ 3) 0,35 4) $\frac{20}{7}$

2. Гитара стоит 6 тысяч рублей, а комплект струн — 300 рублей. Найдите отношение стоимости струн к стоимости гитары.

1) $\frac{300}{6}$ 2) $\frac{6}{300}$ 3) $\frac{20}{3}$ 4) $\frac{1}{20}$

3. Укажите, из каких отношений можно составить пропорцию:

$А = 0{,}875 : \frac{4}{5}$; $Б = 8{,}75 : 12{,}5$; $В = 0{,}125 : \frac{7}{80}$; $Г = 11\frac{2}{3} : 10\frac{2}{3}$.

1) А и Б 2) А и Г 3) Б и Г 4) Б и В

4. Из пропорции $\frac{2}{3} = 8 : 12$ составили 4 равенства. Укажите неверное.

1) $8 \cdot 3 = 2 \cdot 12$ 2) $8 : 3 = 12 : 2$ 3) $2 : 8 = 3 : 12$ 4) $8 = \frac{2}{3} \cdot 12$

5. Из равенства $4 \cdot 14 = 0{,}2 \cdot 280$ составлены верные пропорции. Укажите их.

А) $4 : 0{,}2 = 280 : 14$ Б) $0{,}2 : 4 = 14 : 280$
В) $280 : 4 = 14 : 0{,}2$ Г) $4 : 280 = 14 : 0{,}2$

1) А, В, Г 2) А, Б, В 3) А, Б, Г 4) Б, В, Г

6. За 50 рублей купили 3,2 кг баклажанов. Сколько кг баклажанов можно купить за 65 рублей?

1) $\frac{32}{13}$ 2) 4,16 3) 4,2 4) 3,5

7. Две трубы наполняют бассейн за 5,3 часа. За какое время наполнят бассейн 5 таких труб (в ч)?

1) $\frac{100}{53}$ 2) 13,25 3) 2,12 4) 0,53

8. Сварили джем из малины, красной смородины и чёрной смородины массой 3 кг. Найдите массу малины в джеме (в кг), если массовые доли ингредиентов джема в указанном порядке относятся как 2 : 1 : 3.

1) 0,5 2) 1 3) 1,5 4) 2

Вариант № 6

1. Отрезок длиной 80 см разделили на два отрезка в отношении 5 : 3. Найдите длину большего отрезка (в см).

1) 10 2) 46 3) 8,8 4) 50

2. Укажите равенство, которое является пропорцией.

1) $8{,}4 : 2{,}1 = 2{,}8 + 1{,}2$ 2) $8{,}4 : 2{,}1 = 2 \cdot 2$

3) $8{,}4 : 2{,}1 = 12 : 3$ 4) $8{,}4 : 2{,}1 = 6 - 2$

3. Найдите неизвестный член пропорции $\frac{7}{13} = \frac{x}{39}$.

1) $\frac{91}{39}$ 2) 20 3) $\frac{507}{7}$ 4) 21

4. Тетради в количестве 126 штук разделили между двумя классами в отношении 10 : 11. Сколько тетрадей составляет бóльшая часть?

1) 90 2) 76 3) 63 4) 66

5. За $\frac{1}{5}$ ч велосипедист проезжает 3,6 км. Какое расстояние он проедет за $\frac{4}{9}$ ч, двигаясь с той же скоростью (в км)?

1) 18 2) 3,2 3) 8 4) другой ответ

6. Укажите для пропорции $15c : 2d = 4a : 7b$ верное равенство.

1) $105cd = 8ab$ 2) $30cd = 28ab$

3) $60ac = 14bd$ 4) $105bc = 8ad$

7. Один грамм яблок стоит x копеек. Сколько рублей стоит y килограммов яблок?

1) $10xy$ 2) $100xy$ 3) $\frac{xy}{10}$ 4) $\frac{xy}{100}$

8. Магазин в первый день продал половину привезённых гусей и ещё $\frac{1}{2}$ гуся; во второй день — $\frac{1}{3}$ часть остатка и ещё $\frac{1}{3}$ гуся, а в третий день магазин продал оставшихся 33-х гусей. Сколько всего гусей было привезено в магазин?

Ответ: ______

§ 3. Проценты

Основные сведения

1% — это $\frac{1}{100}$ часть от целого.

Чтобы найти проценты от числа, нужно число процентов представить в виде десятичной дроби и данное число умножить на эту десятичную дробь.

Если x — количество процентов, которое составляет число a от числа b, то $x = \frac{a \cdot 100}{b}$.

Если числу a соответствует $p\%$ $(p < 100)$, а числу x соответствует 100%, то $x = \frac{a \cdot 100}{p}$.

Формула простого процентного роста (формула простых процентов):

$$S_n = S\left(1 + \frac{pn}{100}\right),$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

Формула сложного процентного роста (формула сложных процентов).

$$S_n = S\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n,$$

где S_n — наращённая сумма (исходная сумма вместе с начисленными процентами);

S — исходная сумма;

$p\%$ — процентная ставка от суммы, выраженная в долях за период;

n — число периодов начисления.

Демонстрационный вариант

1. Найдите, сколько процентов составляет число 15 от 125.

1) 25% 2) 7% 3) 15% 4) 12%

Решение. Пусть число 15 от 125 составляет x процентов. Тогда

15 — x%

125 — 100%

Из пропорции $15 : 125 = x : 100$ находим $x = \frac{15 \cdot 100}{125} = 12$. Число 15 от числа 125 составляет 12%. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

2. Найдите 35% от числа 80.

1) $\frac{16}{7}$ 2) $\frac{7}{16}$ 3) 28 4) 3,5

Решение. 35% = 0,35.

Следовательно, 35% от числа 80 равно $80 \cdot 0{,}35 = 28$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. В доме 160 двухкомнатных и 240 трёхкомнатных квартир. Сколько процентов от всех квартир составляют трёхкомнатные?

1) 5% 2) 60% 3) 63,5% 4) 40%

Решение. Всего в доме квартир $160 + 240 = 400$. Пусть x% из них трёхкомнатные. Тогда $x = \frac{240 \cdot 100}{400} = 60$. Трёхкомнатные квартиры составляют 60% от всех квартир. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Когда рабочий сделал 2484 детали, то оказалось, что он выполнил 46% месячной нормы. Сколько деталей составляет месячная норма рабочего?

1) 5400 2) 4600 3) 2116 4) 1600

Решение. Пусть месячная норма составляет x деталей. Тогда

2484 деталей — 46%

x деталей — 100%

Из пропорции $2484 : x = 46 : 100$ находим $x = \frac{2484 \cdot 100}{46} = 5400$; 5400 деталей — месячная норма рабочего. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

5. Площадь поля составляет 84 га. В I день вспахали 21 га. Сколько процентов поля не вспахали?

1) 50% 2) 75% 3) 40% 4) 25%

Решение. Согласно условию, невспаханными остались $84 - 21 = 63$ га поля. Пусть эта величина составляет $x\%$ поля. Тогда

84 га — 100%

63 га — $x\%$

Из пропорции $84 : 63 = 100 : x$ находим $x = \frac{63 \cdot 100}{84} = 75$. Следовательно, 75% поля не вспахали. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. Смешали два раствора соли по 250 г каждый. Концентрация первого раствора 12%, второго — 24%. Какова концентрация полученного раствора?

1) 26% 2) 30% 3) 60% 4) 18%

Решение. Концентрация первого раствора соли массой 250 г составляет 12%. То есть соли в этом растворе $\frac{250 \cdot 12}{100} = 30$ (г).

Концентрация второго раствора соли массой 250 г составляет 24%. Это означает, что соли в этом растворе $\frac{250 \cdot 24}{100} = 60$ (г).

После того как смешали два раствора, в 500 г нового раствора стало содержаться $30 + 60 = 90$ (г) соли, что составляет $\frac{90 \cdot 100}{500} = 18(\%)$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

7. Найдите отношение 0,28 ц к 140 кг. Ответ выразите в процентах.

1) 20% 2) 33% 3) 300% 4) 35%

Решение. 1 ц = 100 кг, следовательно, 0,28 ц = 28 кг. Процентное отношение масс равно $\frac{28}{140} \cdot 100\% = 20\%$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Клиент открыл в банке счет и положил на срочный вклад 500 тыс. рублей. Определите сумму вклада через 2 года, если банк начисляет сложные проценты по ставке 30% годовых и дополнительных вложений не поступало.

1) 620 тыс. руб. 2) 560 тыс. руб.
3) 845 тыс. руб. 4) 515 тыс. руб.

Решение. 1-й способ. Сумма в 500 тыс. рублей, положенная на банковский счёт под 30% годовых, через год возрастёт до величины $500 \cdot 1{,}3 = 650$ (тыс. рублей). Так как банк начисляет сложные проценты, то за второй год 30% будет начисляться на сумму 650 тыс. рублей и, следовательно, сумма возрастёт до $650 \cdot 1{,}3 = 845$ (тыс. рублей).

Из предложенных ответов верным является 3).

2-й способ. По формуле сложных процентов (см. «Основные сведения к параграфу») получаем $S_2 = 500\left(1+\frac{30}{100}\right)^2 = 500 \cdot \frac{169}{100} = 845$ (тыс. рублей). Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Найдите, сколько процентов составляет число 3,78 от 27.

1) 3,78 2) 27 3) 14 4) 378

2. Найдите 15% от числа 34.

1) 5,1 2) 0,34 3) $2\frac{4}{15}$ 4) $\frac{15}{34}$

3. Рост самого высокого ученика в классе составляет 104% от среднего роста учеников в классе, а рост самого маленького — 92% от среднего роста учеников в классе. Определите, сколько сантиметров составляет рост самого высокого ученика, если рост самого маленького равен 115 см.

1) 125 2) 104 3) 92 4) 130

4. К новогоднему празднику каждому из 48 учеников класса были приготовлены новогодние подарки. Однако на праздник пришли только 36 учеников и забрали свои подарки. На следующий день несколько учеников забрали ещё 75% от оставшихся подарков. Сколько подарков осталось?

1) 84 2) 2 3) 3 4) 12

5. В книге 125 страниц. Петя прочитал 30 страниц. Какой процент от общего числа страниц книги прочитал Петя?

1) 30 2) 15 3) 24 4) 20

6. В ювелирном изделии содержание золота составляет 75% от общей массы изделия. Сколько граммов золота содержится в изделии, если его общая масса равна 4 г?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

7. Стоимость одной тетради в магазине увеличилась на 10%, а затем в связи с уценкой уменьшилась на 10%. Сколько рублей стала стоить тетрадь после уценки, если её первоначальная стоимость составляла 26 рублей?

1) 25,74 2) 16 3) 26 4) 23,4

8. Стоимость обучения на подготовительных курсах увеличилась в 1,7 раза. На сколько процентов возросла стоимость обучения относительно первоначальной?

1) 1,7 2) 70 3) 30 4) 170

Вариант № 2

1. Найдите 15% от числа 220.

1) 15 2) 33 3) 330 4) 22

2. В двух ящиках 75 кг яблок. В первом ящике 48% всех яблок. Сколько килограммов яблок во втором ящике?

1) 36 2) 45 3) 39 4) другой ответ

3. Из молока можно получить творог, масса которого составляет 10% от массы молока. Сколько килограммов творога получится из 15 кг молока?

1) 10 2) 1,5 3) 5 4) 16,5

4. Найдите число, если 17% его равны произведению чисел $6{,}8 \cdot 10^2$ и 0,21.

1) 0,84 2) 840 3) 525 4) 84

5. Определите длину пути, равную 27% от 0,2 км. Ответ запишите в метрах.

1) 0,054 2) 54 3) 5,4 4) 540

6. В сплаве меди и цинка содержится 12% меди. Масса сплава 1200 г. Сколько в смеси цинка (в г)?

1) 956 2) 1056 3) 144 4) 1000

7. В городе N половину всех зданий составляют одноэтажные строения, 85% из которых являются жилыми домами. Известно, что $\frac{5}{6}$ всех неодноэтажных строений города N газифицировано. Чего в городе N больше — одноэтажных жилых домов или газифицированных неодноэтажных строений?

1) одноэтажных жилых домов

2) газифицированных неодноэтажных строений

3) поровну тех и других

4) для сравнения не хватает данных

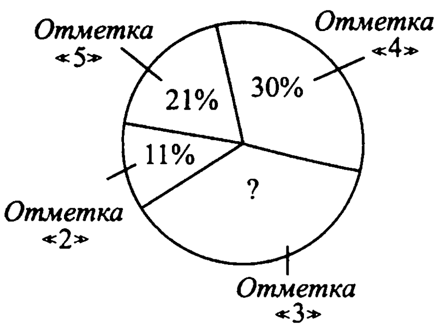


Рис. 2.

8. Результаты районной контрольной работы по алгебре в 9-м классе представили в виде диаграммы (см. рис. 2). Сколько учащихся получили отметку «3», если всего работу писали 350 девятиклассников?

1) 113 учащихся 2) 123 учащихся
3) 133 учащихся 4) 143 учащихся

Вариант № 3

1. Найдите, сколько процентов от числа 20 составляет число 7.

1) 20 2) 7 3) 35 4) 287

2. Найдите 25% от числа 68.

1) $\frac{17}{25}$ 2) $\frac{25}{68}$ 3) 17,2 4) 17

3. В парке посадили клёны и липы, причём на каждые 3 липы приходилось 2 клёна. Сколько процентов от всех посаженных деревьев составляли клёны?

1) 20% 2) 30% 3) 40% 4) 60%

4. Нефтеразведочная экспедиция проводила исследования для определения вероятности наличия нефти на выделенных участках Западной Сибири. На завершающем этапе разведки проводился сейсмический тест на 49 участках, что составило 35% от общего числа участков. Определите число участков, на которых проводились исследования.

1) 98 2) 100 3) 140 4) 147

5. Из ружья сделано 50 выстрелов, причем 10 пуль пролетели мимо цели. Определите процент попаданий.

1) 10 2) 40 3) 50 4) 80

6. Смешали три раствора сахара массой 200 г каждый. Концентрация первого раствора — 14%, концентрация второго — 16%, концентрация третьего — 30%. Какова концентрация полученного раствора (в процентах)?

1) 60 2) 20 3) 12 4) 8

7. Найдите отношение величин 7 ц и 350 кг. Ответ выразите в процентах.

1) 2 2) 50 3) 140 4) 200

8. Первоначальный банковский вклад составил 600 тыс. рублей. Определите сумму вклада через три года, если банк начисляет сложные проценты по ставке 20% годовых и дополнительных вложений не поступало.

1) 720 руб. 2) 1036,8 тыс. руб. 3) 10368 руб. 4) 720 тыс. руб.

Вариант № 4

1. Найдите 30% от числа 90.

1) 27 2) 30 3) 3 4) 300

2. В гараже были КАМАЗы и ЗИЛы, причём на 3 КАМАЗа приходилось 7 ЗИЛов. Сколько процентов от общего числа машин в гараже составляли ЗИЛы?

1) 30 2) 70 3) 81 4) 75

3. Число 28 составляет 42% от числа

1) 9,52 2) $\frac{200}{3}$ 3) $\frac{100}{3}$ 4) 66

4. Потратили 76% денежной суммы. Сколько процентов этой суммы осталось?

1) 34 2) 24 3) 26 4) 56

5. Масса сушёных яблок составляет 18% от массы свежих. Сколько килограммов сушёных яблок получится из 250 кг свежих?

1) 45 2) 20 3) 120 4) 75

6. Результаты контрольной работы по математике в классе представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 3). Сколько школьников получили оценку «2», если в классе 40 учащихся?

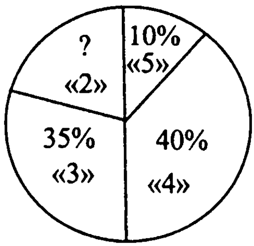


Рис. 3.

Ответ: ______

7. У Вовы 60 марок. У Вити на 20% марок меньше, чем у Вовы, а у Серёжи на 30% больше, чем у Вовы. Сколько всего марок у Вити и Серёжи?

1) 114 2) 142 3) 138 4) 126

8. В банк положили 12 000 рублей. В соответствии с договором банк по окончании года будет начислять 15% от суммы, находящейся на счете. Какова будет сумма (в рублях) средств на счёте по истечении двух лет, если договором не предусмотрено дополнительное вложение денег?

Ответ: ______

Вариант № 5

1. Сколько процентов составляет число 24 от числа 15?

1) 62,5 2) 120 3) 16 4) 160

2. Найдите число, которое на 15% больше числа 130.

1) 145 2) 149,5 3) 19,5 4) 110,5

3. В семейной коллекции дисков на каждый диск с музыкой приходится 4 диска с мультфильмами и 5 дисков с фильмами. Сколько процентов от всех дисков составляют диски с мультфильмами?

1) 30 2) 40 3) 37,5 4) 50

4. В некоторой школе среди выпускников 9-го класса 13 двоечников, что составляет 6,5% от всех выпускников. Сколько всего выпускников 9-го класса в этой школе?

1) 845 2) 200 3) 213 4) 187

5. У фермера 145 кроликов, причём 125 из них **не** белого цвета. Определите, сколько процентов от общего количества составляют белые кролики. Ответ округлите до целых.

1) 16 2) 14 3) 86 4) 20

6. Корова даёт молоко 3,8%-ной жирности, а коза — 4,1%-ной жирности. Молоко какой жирности получится, если смешать молоко коровы и козы в отношении 1 : 2?

1) 3,85% 2) 3,9% 3) 3,95% 4) 4%

7. Найдите отношение величин скоростей 61,2 км/ч и 5 м/с. Ответ выразите в процентах.

1) 3,4 2) 340 3) 12,24 4) 1224

8. Цена на холодильник сначала повысилась на 13%, потом понизилась на 20% от новой цены, после чего составила 11 300 рублей. Определите первоначальную цену холодильника (в рублях).

1) 12 105 2) 10 580 3) 11 275 4) 12 500

Вариант № 6

1. Найдите число, 20% которого равны 100.

1) 500 2) 800 3) 20 4) 80

2. Ручка стоит 17 рублей, что составляет 85% стоимости блокнота. Сколько стоит блокнот?

1) 14,25 руб. 2) 20 руб. 3) 30 руб. 4) 35 руб.

3. Сколько процентов от 4 км составляют 25 метров?

1) 0,0625 2) 62,5 3) 6,25 4) 0,625

4. Сколько страниц в книге, если в рассказе, который составляет 15% от общего числа, 12 страниц?

1) 150 2) 68 3) 92 4) 80

4. Зак. № 199

5. Первое число равно 2, второе — 3. Сколько процентов составляет первое число от суммы этих чисел?

1) 42 2) 44 3) 40 4) 30

6. Сплав содержит 16% олова. Сколько граммов олова содержится в 125 г сплава?

1) 25 2) 20 3) 40 4) 50

7. Цена товара сначала снизилась на 40%, а затем его новая цена повысилась на 40%. Сравните последнюю цену товара с его первоначальной ценой.

1) цена стала ниже 2) цена стала выше
3) не изменилась 4) для ответа не хватает данных

8. Результаты единого государственного экзамена по математике представили в виде диаграммы (см. рис. 4). Сколько учащихся получили отметку «3», если всего экзамен сдавали 450 учащихся?

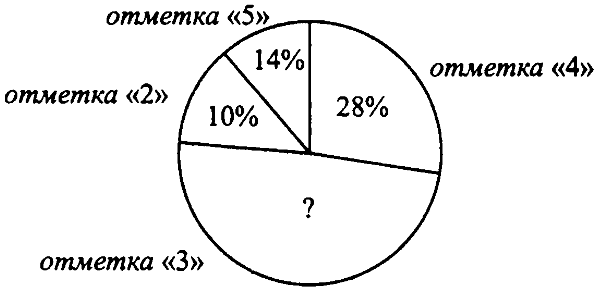


Рис. 4.

1) 206 2) 278 3) 216 4) 308

§ 4. Арифметические действия. Сравнение чисел

Основные сведения

Если умножить числитель и знаменатель дроби на одинаковую величину, отличную от 0, то значение дроби останется прежним.

Если числитель и знаменатель заданной дроби имеют общий делитель, то обе части можно разделить на него; такая операция называется сокращением дроби.

Сравнение дробей. Для сравнения, сложения и вычитания обыкновенных дробей их следует привести к одному и тому же знаменателю.

Чтобы сравнить две обыкновенные дроби, следует привести их к общему знаменателю и сравнить числители получившихся дробей. Дробь с бóльшим числителем будет больше.

На координатном луче точка, имеющая меньшую координату, лежит левее точки, имеющей бóльшую координату.

Из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше.

Умножение дробей. Чтобы умножить две обыкновенные дроби, нужно перемножить их числители и знаменатели: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо числитель умножить на это число, а знаменатель оставить тем же.

Деление дробей. Чтобы разделить одну обыкновенную дробь на другую, надо умножить первую на дробь, обратную второй:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Чтобы получить дробь, обратную данной, следует поменять местами числитель и знаменатель.

Преобразование дробей. Чтобы преобразовать обыкновенную дробь в дробь десятичную, следует разделить числитель на знаменатель. При этом не всегда можно получить конечную десятичную дробь.

Несократимую обыкновенную дробь можно представить в виде конечной десятичной дроби, если в разложении её знаменателя на простые множители присутствуют только множители 2 и 5.

Чтобы преобразовать конечную десятичную дробь в дробь обыкновенную, следует представить её дробную часть в виде натурального числа, делённого на соответствующую степень числа 10. Затем к результату слева приписать целую часть, формируя смешанную дробь.

Демонстрационный вариант

1. Вычислите $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4$.

1) 9,6 2) 10,6 3) 12,2 4) −2,2

Решение. $11 \cdot 2\frac{13}{55} - 12{,}4 = 11 \cdot 2 + \frac{11 \cdot 13}{55} - 12{,}4 = 22 + \frac{13}{5} - 12{,}4 =$ $= 22 + 2{,}6 - 12{,}4 = 12{,}2$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. На координатной прямой отмечены числа x и y (см. рис. 5). Какое из этих утверждений верно?

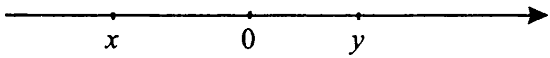


Рис. 5.

1) $x^2y > 0$ 2) $x^5y^3 > 0$ 3) $x^3y^2 > 0$ 4) $xy > 0$

Решение. Согласно рисунку $x < 0$, $y > 0$.

Рассмотрим предложенные утверждения.

Утверждение 1) верно, так как $x^2 > 0$ и, следовательно, $x^2y > 0$.

Утверждение 2) неверно, так как $x^5 < 0$, $y^3 > 0$ и, следовательно, $x^5y^3 < 0$.

Утверждение 3) неверно, так как $x^3 < 0$, $y^2 > 0$ и, следовательно, $x^3y^2 < 0$.

Утверждение 4) неверно, так как $x < 0$, $y > 0$ и, следовательно, $xy < 0$.

Из приведённых утверждений верным является только 1).

Ответ: 1.

3. Расположите числа в порядке возрастания $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1; $-1\frac{1}{3}$.

1) $-\frac{1}{3}$; -1; $-1\frac{1}{3}$; $-0{,}3$ 2) $-1\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$; -1

3) -1; $-0{,}3$; $-\frac{1}{3}$; $-1\frac{1}{3}$ 4) $-1\frac{1}{3}$; -1; $-\frac{1}{3}$; $-0{,}3$

Решение. Запишем заданные числа в виде десятичных дробей. Получим последовательность чисел: $-0{,}(3)$; $-0{,}3$; -1; $-1{,}(3)$.

Учитывая, что из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, расположим полученные числа в порядке возрастания:

$-1,(3)$; -1; $-0,(3)$; $-0,3$. Этой последовательности соответствует последовательность 4).

Ответ: 4.

4. Сравните a и b, если $a = 6 : (-2)$, $b = 12 : (-6)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$ 3) $a > b$ 4) другой ответ

Решение. $a = 6 : (-2) = -(6 : 2) = -3$,
$b = 12 : (-6) = -(12 : 6) = -2$. Так как из двух отрицательных чисел больше то, модуль которого меньше, то $-3 < -2$, значит, $a < b$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Найдите, при каком значении A равенство $A \cdot 4^2 = 240$ верно.

1) $A = 15$ 2) $A = 1,5$ 3) $A = 30$ 4) $A = 224$

Решение. Преобразуем равенство $A \cdot 4^2 = 240$ к виду $A \cdot 4^2 = 4^2 \cdot 15$. Отсюда $A = 15$. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Соотнесите частное

$А = 145 : 5$; $Б = -4,76 : 0,01$; $В = \frac{6}{7} : \frac{8}{63}$

и результат.

1) 6,75 2) -476 3) $-0,00476$ 4) 29

Решение. Вычислим каждое из заданных частных.
$А = 145 : 5 = 29$ соответствует результату 4);
$Б = -4,76 : 0,01 = -476$ соответствует результату 2);
$В = \frac{6}{7} : \frac{8}{63} = \frac{6}{7} \cdot \frac{63}{8} = \frac{6 \cdot 63}{7 \cdot 8} = \frac{3 \cdot 9}{4} = 6,75$ соответствует результату 1).

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

7. Запишите в виде равенства: произведение суммы чисел a и x и их разности равно t.

1) $(a + x) + (a - x) = t$ 2) $(a + x) : (a - x) = t$

3) $(a + x) \cdot (a - x) = t$ 4) $\frac{a + x}{ax} = t$

Решение. Сумма чисел a и x записывается в виде $a + x$; «их разность» записывается в виде $a - x$; запись выражения «произведение суммы чисел a и x и их разности» имеет вид: $(a + x) \cdot (a - x)$. Согласно условию, это произведение равно t, то есть $(a+x)\cdot(a-x)=t$. Из предложенных вариантов ответов этой записи соответствует 3).

Ответ: 3.

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел 27,35 и 0,056?

1) 5 2) 6 3) 3 4) 4

Решение. Найдём разность заданных чисел: $27{,}35-0{,}056=27{,}294$. $\frac{1}{10}$ этой разности равна $\frac{1}{10}\cdot 27{,}294=2{,}7294$. Это число содержит 4 знака после запятой.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Вычислите $\left(5\frac{2}{3}-4\frac{1}{6}\right)\cdot 3\frac{1}{3}$.

1) $0{,}25$ 2) 5 3) 3 4) $1\frac{1}{6}$

2. На координатной прямой отмечены числа a и b (см. рис. 6). Какое из данных утверждений верно?

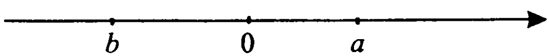


Рис. 6.

1) $ab>0$ 2) $ba^2>0$ 3) $ab^2>0$ 4) $(ab)^3>0$

3. Расположите числа в порядке убывания $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$.

1) $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$ 2) $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$; $-1\frac{2}{3}$; $-\frac{5}{6}$

3) $-\frac{5}{6}$; $-1\frac{2}{5}$; $-2\frac{1}{6}$; $-2{,}6$ 4) $-1\frac{2}{5}$; $-\frac{5}{6}$; $-2{,}6$; $-2\frac{1}{6}$

4. Сравните числа a и b, если $a=7:(-3)$, $b=3:(-7)$.

1) $a=b$ 2) $a<b$ 3) $a>b$ 4) другой ответ

5. Найдите, при каком значении A равенство $A:1\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$ верно.

1) $A=\frac{4}{5}$ 2) $A=\frac{5}{16}$ 3) $A=3\frac{1}{5}$ 4) $A=\frac{2}{5}$

6. Соотнесите произведения

$А = 12{,}3 \cdot 2{,}1;$ $Б = \frac{25}{3} \cdot 1\frac{3}{15};$ $В = 13{,}2 \cdot 1\frac{3}{4}$

и результат.

1) 23,1 2) 25,83 3) 14,4 4) 10

Ответ:

А	Б	В

7. Запишите в виде числового равенства: частное от деления разности чисел $\frac{3}{4}$ и 5,75 на сумму чисел $\frac{3}{11}$ и $\frac{1}{33}$ равно произведению числа -3 на сумму чисел 4 и $\frac{3}{2}$.

1) $\frac{3}{4} : 5{,}75 - \frac{3}{11} : \frac{1}{33} = -3\left(4 + \frac{3}{2}\right)$

2) $\left(\frac{3}{4} - \frac{3}{11}\right) : \left(5{,}75 - \frac{1}{33}\right) = -3 \cdot 4 - 3 \cdot \frac{3}{2}$

3) $\left(\frac{3}{4} - 5{,}75\right) : \left(\frac{3}{11} + \frac{1}{33}\right) = -3 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{3}{2}$

4) $\left(\frac{3}{4} - 5{,}75\right) : \left(\frac{3}{11} + \frac{1}{33}\right) = -3\left(4 + \frac{3}{2}\right)$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение числа 0,001 на разность чисел 3272,354 и 1262,304?

1) 0 2) 1 3) 5 4) 6

Вариант № 2

1. Значение выражения $-7 - 10 : (-2{,}5) - 5 \cdot \frac{1}{6}$ равно

1) $-3\frac{5}{6}$ 2) $-11\frac{5}{6}$ 3) $-10\frac{1}{6}$ 4) $-2\frac{1}{6}$

2. На координатной прямой (см. рис. 7) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

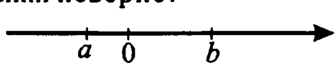


Рис. 7.

1) $a^2b > 0$ 2) $a + b > 0$ 3) $a - b > 0$ 4) $b - a > 0$

3. Найдите разность между значениями выражений $\frac{0{,}2}{0{,}05}$ и $\frac{6}{18} \cdot 0{,}3$.

1) 4,1 2) 3,9 3) −3 4) 0,3

4. Укажите наибольшее из чисел: 0,34; $\frac{7}{3}$; $\frac{7}{4}$; 1,1.

1) 0,34 2) $\frac{7}{4}$ 3) $\frac{7}{3}$ 4) 1,1

5. Пусть $A = 0{,}34$ млн, а $B = 3{,}4 \cdot 10^7$. Сравните A и B.

1) $B < A$ 2) $B > A$ 3) $B = A$ 4) другой ответ

6. В таблице приведены результаты соревнований по прыжкам в высоту.

Страна	Россия	США	Китай	Англия	Франция	КНДР	ЮАР
Результат (м)	2,4	2,08	1,96	1,97	2,22	1,7	1,7

Представитель какой страны показал третий результат?

1) Китай 2) США 3) Англия 4) Франция

7. Найдите значение выражения $\frac{1{,}4^2 + 0{,}2^2}{1{,}3 - 0{,}8}$.

Ответ: ______

8. Найдите количество песчинок, содержащихся в 1 тонне песка, считая, что масса каждой песчинки составляет 0,002 г.

1) $2 \cdot 10^9$ 2) $2 \cdot 10^8$ 3) $5 \cdot 10^9$ 4) $5 \cdot 10^8$

Вариант № 3

1. Вычислите $\left(2{,}5 - 3\frac{1}{2}\right) : 0{,}5$.

1) 0,5 2) 2 3) −2 4) −0,5

2. На координатной прямой (см. рис. 8) отмечены числа x и y. Какое из приведённых утверждений верно?

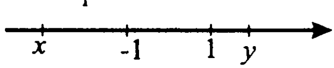


Рис. 8.

1) $xy^2 > 0$ 2) $y - x < 0$ 3) $xy > 0$ 4) $x^2 - y > 0$

3. Расположите числа в порядке возрастания: 0,3; $\frac{1}{2}$; -5; $-4{,}8$.

1) 0,3; $\frac{1}{2}$; -5; $-4{,}8$ 2) -5; $-4{,}8$; 0,3; $\frac{1}{2}$

3) $-4{,}8$; -5; $\frac{1}{2}$; 0,3 4) $\frac{1}{2}$; 0,3; $-4{,}8$; -5

4. Сравните a и b, если $a = 2 : (-3)$, $b = 2 \cdot (-3)$.

1) $a = b$ 2) $a < b$
3) $a > b$ 4) другой ответ

5. Найдите, при каком значении A равенство $A \cdot 3^2 = 27$ верно.

1) $A = 9$ 2) $A = \frac{9}{2}$ 3) $A = 243$ 4) $A = 3$

6. Соотнесите частное

А = 123 : 6; Б = $\frac{5}{7} : \frac{2}{49}$; В = $-3{,}25 : 0{,}001$

и результат.

1) 17,5 2) -3250 3) -325 4) $20\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

7. Запишите в виде числового равенства: удвоенная сумма чисел $\frac{1}{3}$ и $2\frac{4}{6}$ равна частному от деления разности чисел 0,5 и $(-0{,}1)$ на число 0,1.

1) $\frac{2}{3} + 2\frac{4}{6} = (0{,}5 + 0{,}1) : 0{,}1$

2) $2\left(\frac{1}{3} + 2\frac{4}{6}\right) = (0{,}5 - (-0{,}1)) : 0{,}1$

3) $2\left(\frac{1}{3} + 2\frac{4}{6}\right) = (0{,}5 + 0{,}1) : 0{,}01$

4) $\frac{2}{3} + 2\frac{4}{6} = (5 - (-0{,}1)) : 0{,}1$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{100}$ суммы чисел 53,95 и 0,055?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 5

Вариант № 4

1. Вычислите $\left(3{,}6 - 3\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}3$.

1) 0,09 2) −0,09 3) 0,08 4) −0,08

2. На координатной прямой (см. рис. 9) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

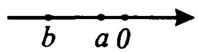


Рис. 9.

1) $a + b < 0$ 2) $a - b > 0$ 3) $ab > 0$ 4) $b - a > 0$

3. Расположите числа в порядке убывания: 1,3; $\frac{1}{2}$; −2,3; $1\frac{1}{3}$.

1) $\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$; 1,3; −2,3 2) $1\frac{1}{3}$; 1,3; $\frac{1}{2}$; −2,3

3) − 2,3; $1\frac{1}{3}$; 1,3; $\frac{1}{2}$ 4) − 2,3; 1,3; $1\frac{1}{3}$; $\frac{1}{2}$

4. Сравните x и y, если $x = 3 \cdot (-4)$, $y = 3 : (-4)$.

1) $x > y$ 2) $x = y$
3) $x < y$ 4) другой ответ

5. При каком значении t равенство $4^3 \cdot t = 128$ верное?

1) $t = 1$ 2) $t = 2$ 3) $t = 3$ 4) $t = 4$

6. Соотнесите произведение чисел

$А = 3 \cdot 12$; $Б = \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{14}$; $В = -4{,}25 \cdot 17$

и результат.

1) 0,5 2) −68,25 3) 36 4) −72,25

Ответ:

А	Б	В

7. Запишите в виде числового равенства: утроенная разность чисел $4\frac{5}{6}$ и $1\frac{1}{2}$ равна частному от деления суммы чисел $31\frac{1}{4}$ и $18\frac{3}{4}$ на 5.

1) $3\left(4\frac{5}{6}+1\frac{1}{2}\right)=\dfrac{31\frac{1}{4}-18\frac{3}{4}}{5}$

2) $\dfrac{4\frac{5}{6}-1\frac{1}{2}}{3}=5\left(31\frac{1}{4}-18\frac{3}{4}\right)$

3) $3\left(4\frac{5}{6}-1\frac{1}{2}\right)=\dfrac{31\frac{1}{4}+18\frac{3}{4}}{5}$

4) $\dfrac{4\frac{5}{6}+1\frac{1}{2}}{3}=\dfrac{31\frac{1}{4}+18\frac{3}{4}}{5}$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит $\frac{1}{10}$ разности чисел 21,66 и 13,86?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Вариант № 5

1. Вычислите $\left(3\frac{1}{5}-1{,}1\right):\frac{1}{5}$.

1) 10 2) 10,5 3) 12 4) 0,42

2. На координатной прямой (см. рис. 10) отмечены числа m и n. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

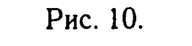


Рис. 10.

1) $mn>0$ 2) $m^2n>0$ 3) $m-n<0$ 4) $n+m>0$

3. Расположите числа в порядке убывания: $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$; –0,75.

1) $\frac{4}{5}$; 0,55; $-\frac{5}{7}$; –0,75 2) $\frac{4}{5}$; 0,55; –0,75; $-\frac{5}{7}$

3) 0,55; $\frac{4}{5}$; $-\frac{5}{7}$; –0,75 4) – 0,75; $-\frac{5}{7}$; 0,55; $\frac{4}{5}$

4. Сравните значения выражений $a + 2b$ и $b - a$ при $a = -1$, $b = 2{,}5$.

1) $a + 2b < b - a$ 2) $a + 2b > b - a$

3) $a + 2b = b - a$ 4) другой ответ

5. Найдите значение a, при котором выражение $0{,}5a - 3\frac{3}{4}$ равно нулю.

1) 0,75 2) $\frac{15}{8}$ 3) 1,5 4) 7,5

6. Соотнесите произведение чисел

А $= 0{,}02 \cdot 15$; Б $= \frac{3}{7} \cdot 2{,}8$; В $= 3{,}14 \cdot \frac{1}{5}$

и результат.

1) 0,3 2) 0,628 3) 3 4) 1,2

Ответ:

А	Б	В

7. Запишите на математическом языке высказывание: «Разность чисел 5 и 2 не превосходит произведение суммы чисел 3 и 7 на число 1,05».

1) $5 = 2 < (3 + 7) \cdot 1{,}05$ 2) $5 + 2 > (3 + 7) \cdot 1{,}05$

3) $5 - 2 \leqslant 3 \cdot 1{,}05 + 7$ 4) $5 - 2 \leqslant (3 + 7) \cdot 1{,}05$

8. Сколько десятичных знаков после запятой содержит произведение чисел 6,482 и –2,555?

1) 6 2) 5 3) 3 4) 4

Вариант № 6

1. Вычислите $\left(5{,}5 - 2\frac{5}{6}\right) : 4 - 1$.

1) $\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{8}{9}$ 4) $9\frac{2}{3}$

2. На координатной прямой (см. рис. 11) отмечены числа a и b. Какое из приведённых утверждений **неверно**?

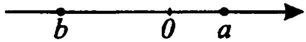


Рис. 11.

1) $a > b$ 2) $a + b > 0$ 3) $ab < 0$ 4) $a - b > 0$

3. Найдите разность между значениями выражений $\frac{0{,}3}{0{,}18}$ и $\frac{13}{20} : 0{,}2$.

1) -2 2) $1\frac{7}{30}$ 3) $-0{,}5$ 4) $-3\frac{1}{12}$

4. Укажите наименьшее из чисел: $\frac{7}{8}$; $\frac{7}{9}$; 0,75; 0,81.

1) $\frac{7}{8}$ 2) $\frac{7}{9}$ 3) 0,75 4) 0,81

5. Укажите большее из чисел: $a = -\frac{3}{8}$; $b = -0{,}4$; $c = -\frac{1}{4}$; $d = -0{,}9$.

1) d 2) c 3) b 4) a

6. Пять лучших результатов районной олимпиады по математике представлены в таблице:

Фамилия ученика	Иванов	Петров	Буслов	Юрьев	Смирнов
Кол-во баллов	14,8	12,3	14,5	15,7	12,1

Какой ученик занял 3-е место?

1) Буслов 2) Петров 3) Юрьев 4) Иванов

7. Найдите значение выражения $\frac{1{,}2^2 - 0{,}8^2}{1{,}4 - 1}$.

Ответ: ______

8. Скорость Ахиллеса составляет 10 м/с, скорость черепахи — 0,1 км/ч. Во сколько раз скорость Ахиллеса больше, чем скорость черепахи?

1) 10 2) 100 3) 36 4) 360

§ 5. Числовые подстановки в буквенные выражения. Формулы

Основные сведения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется одна или несколько алгебраических величин (чисел и букв), соединённых между собой знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень; а также скобки, определяющие порядок выполнения действий.

Если вместо всех букв, входящих в алгебраическое выражение, подставить некоторые числа и выполнить действия, то полученное в результате число называется **значением алгебраического выражения**.

Демонстрационный вариант

1. Найдите значение выражения $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot a$ при $a = 0{,}12$.

1) 1,1 2) 2 3) −8,8 4) 0

Решение. Подставим в заданное выражение значение $a = 0{,}12$. Получим $1{,}2 - \frac{5}{6} \cdot 0{,}12 = 1{,}2 - 5 \cdot 0{,}02 = 1{,}2 - 0{,}1 = 1{,}1$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Из формулы второго закона Ньютона $a = \frac{F}{m}$ выразите силу F.

1) $F = \frac{a}{m}$ 2) $F = \frac{m}{a}$ 3) $F = ma$ 4) $F = \frac{Fm}{a}$

Решение. Умножив обе части заданного равенства на m, получим $m \cdot a = \frac{F \cdot m}{m}$. Отсюда $F = ma$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Путь $S(t)$ в метрах, который автомобиль проезжает за t секунд, вычисляется по формуле $S(t) = 2t^2 + 5$. За сколько секунд автомобиль проедет 55 м?

1) 25 2) 5 3) 15 4) 10

Решение. Согласно условию задачи, необходимо найти время t_0, за которое автомобиль пройдёт путь $S(t_0) = 55$.

Следовательно, $2(t_0)^2 + 5 = 55$. Отсюда, учитывая, что $t_0 > 0$, находим $t_0 = 5$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Соотнесите площадь заштрихованной фигуры с соответствующей формулой (см. рис. 12).

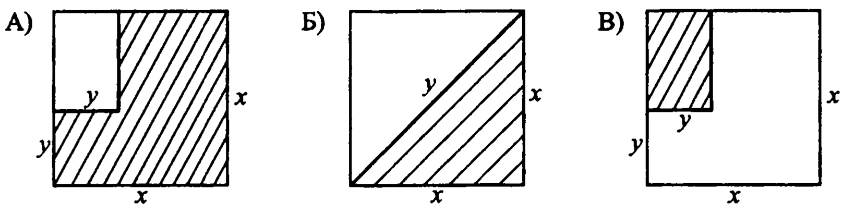


Рис. 12.

1) $\frac{1}{2}x^2$ 2) $x^2 - xy + y^2$ 3) $x^2 + y$ 4) $xy - y^2$

Решение. Найдём площадь каждой из предложенных фигур.

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 12 А, можно найти как разность площади квадрата со стороной x и прямоугольника со сторонами y и $x-y$. Эта площадь $x^2-y(x-y) = x^2-xy+y^2$ соответствует формуле 2).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 12 Б, равна половине площади квадрата со стороной x. Эта площадь $\frac{1}{2} \cdot x^2$ соответствует формуле 1).

Площадь заштрихованной фигуры, изображённой на рисунке 12 В, равна площади прямоугольника со сторонами y и $x - y$. Эта площадь $y(x - y) = xy - y^2$ соответствует формуле 4).

Ответ:

А	Б	В
2	1	4

5. Площадь правильного треугольника вычисляется по формуле $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где S — площадь треугольника, a — сторона треугольника.

Во сколько раз площадь правильного треугольника будет больше при $a = 6$, чем при $a = 3$?

1) 9 2) 2 3) 3 4) 4

Решение. Обозначим S_1 — площадь треугольника со стороной $a_1 = 6$, S_2 — площадь треугольника со стороной $a_2 = 3$. Тогда, согласно условию задачи, необходимо найти отношение $S_1 : S_2$.

$$S_1 : S_2 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} : \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{4}{a_2^2\sqrt{3}} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{6^2}{3^2} = 4.$$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Из равенства $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a)$ выразите b.

1) $b = 3a$ 2) $b = 2a - \frac{1}{3}$ 3) $b = 1{,}8a$ 4) $b = 9a$

Решение. $a + \frac{1}{3}b = 2(b - a) \Leftrightarrow 3a + b = 6(b - a) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3a + b = 6b - 6a \Leftrightarrow 5b = 9a \Leftrightarrow b = 1{,}8a.$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Турист прошёл 2 км пешком и проехал на автобусе t часов со скоростью 50 км/ч. Какой путь S проделал турист?

1) $S = 2t + 50$ 2) $S = 2 + 50t$

3) $S = 2 + \frac{t}{50}$ 4) $S = (t + 2) \cdot 50$

Решение. Общий путь S, который преодолел турист, складывается из пути, который он проделал пешком — 2 км, и пути, который он проехал на автобусе — $50 \cdot t$. Следовательно, $S = 2 + 50t$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. У Оли x открыток, у Тани y открыток, у Кати z открыток. Когда Оля и Катя сложили свои открытки вместе, оказалось, что их в 2 раза больше, чем у Тани. Какое из буквенных выражений, представленных ниже, соответствует описанному условию?

1) $x - y = 2z$ 2) $x + z = 2y$

3) $2x - y = z$ 4) $2z - x = y$

Решение. Согласно условию задачи, у Оли и Кати всего $x+z$ открыток, что в два раза больше y — числа открыток Тани. То есть $x + z = 2y$. Из предложенных выражений описанному условию соответствует 2).

Ответ: 2.

Вариант № 1

1. Найдите значение выражения $\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \cdot a + 2{,}3$ при $a = 1{,}2$.

1) 3,8 2) 2,3 3) −0,8 4) −2,75

2. Из формулы нахождения площади треугольника $S = \frac{ah}{2}$, где a — длина основания треугольника, h — высота треугольника, выразите высоту h.

1) $h = \frac{2S}{a}$ 2) $h = \frac{Sa}{2}$ 3) $h = \frac{2a}{S}$ 4) $h = 2Sa$

3. Формула для вычисления прибыли от продажи товара имеет вид $P = O - C$, где C — закупочная стоимость товара, O — отпускная стоимость товара. По какой цене нужно отпустить (продать) товар, приобретённый по цене 12360 руб., чтобы получить прибыль 3240 руб.?

1) 9120 руб. 2) 15600 руб. 3) 6180 руб. 4) 7800 руб.

4. Соотнесите площадь S фигуры, изображённой на рисунке 13, с формулой.

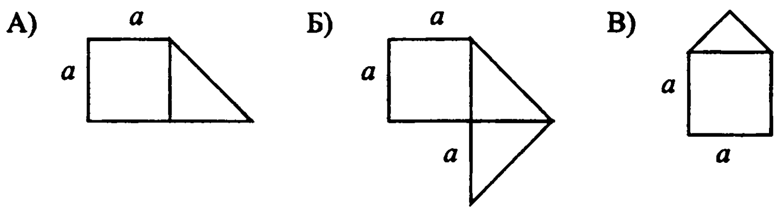


Рис. 13.

1) $S = \frac{5a^2}{4}$ 2) $S = \frac{2a^2}{5}$ 3) $S = \frac{3a^2}{2}$ 4) $S = 2a^2$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$, где a — длина стороны шестиугольника. Во сколько раз длина стороны первого шестиугольника больше длины стороны второго шестиугольника, если $S_1 = 40{,}96$; $S_2 = 10{,}24$?

1) 0,5 2) 2 3) 0,25 4) 4

6. Из равенства $3a - 5b = \dfrac{a}{b+1}$ выразите a.

1) $a = 5b(b+1)$ 2) $a = \dfrac{5b(b+1)}{4}$

3) $a = \dfrac{5b(b+1)}{3b+2}$ 4) $a = \dfrac{b(5b+3)}{3b-1}$

7. Задуманное число сначала увеличили в 3 раза, затем добавили к нему a и полученное число разделили на сумму чисел b и a. В результате получили число c. Составьте выражение для нахождения задуманного числа, обозначив его буквой d.

1) $d = \dfrac{3c+a}{b+a}$ 2) $d = \dfrac{c(b+a)}{3} - a$

3) $d = \dfrac{c(b+a)-a}{3}$ 4) $d = \dfrac{3(c+a)}{b+a}$

8. Собственная скорость катера — $v_к$ км/ч, а скорость течения реки — $v_р$ км/ч. За какое время катер пройдёт путь от причала A до причала B и обратно, если расстояние между причалами равно S км? Составьте по условию задачи буквенное выражение для нахождения искомого времени, обозначив его буквой t.

1) $t = \dfrac{2S}{v_к - v_р}$ 2) $t = \dfrac{S}{v_к - v_р} + \dfrac{S}{v_к + v_р}$

3) $t = 2S(v_к - v_р)$ 4) $t = \dfrac{S(v_к - v_р) + S(v_к + v_р)}{2}$

Вариант № 2

1. Найдите значение выражения $5 - \dfrac{7}{4} \cdot c$ при $c = -8$.

1) -6 2) 7 3) -15 4) 19

2. Из формулы объема конуса $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ выразите высоту h.

1) $h = \dfrac{3V}{\pi r^2}$ 2) $h = \dfrac{V}{3r^2}$ 3) $h = \dfrac{\pi r^2}{3V}$ 4) $h = \dfrac{3\pi r^2}{V}$

3. Скорость первого велосипедиста равна $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, а второго — на $2\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ больше. Какое расстояние проедет второй велосипедист за t часов? Составьте формулу.

1) $s = \frac{v+2}{t}$ 2) $s = (v+2)t$ 3) $s = vt$ 4) $s = 2vt$

4. Найдите значение выражения $\sqrt{5x-2}$ при $x = 1{,}2$.

1) 2 2) $\sqrt{2}$
3) $2\sqrt{2}$ 4) при $x = 1{,}2$ выражение не имеет смысла

5. Сравните $|a|$ и b^2, если известно, что $-1 < a < 1$, $b < -1$.

1) $|a| < b^2$ 2) $|a| > b^2$
3) $|a| = b^2$ 4) для сравнения не хватает данных

6. Известно, что числа a, b и c — отрицательные. Какое из приведенных утверждений верно?

1) $ab + c < 0$ 2) $ab + c > 0$
3) $ab + c = 0$ 4) знак $ab + c$ может быть любым

7. Лодка за одно и то же время может проплыть 45 км по течению реки или 25 км против течения реки. Найдите собственную скорость лодки, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

1) 5 2) 7 3) 9 4) 11

8. В литре воды содержится k граммов солей. Сколько граммов солей содержится в 781 мл воды?

1) $\frac{k \cdot 781}{100}$ 2) $\frac{100 \cdot 781}{k}$ 3) $\frac{1000 \cdot 781}{100} \cdot k$ 4) $\frac{k \cdot 781}{1000}$

Вариант № 3

1. Найдите значение выражения $3 - \frac{7}{8} \cdot 4 + a$ при $a = 0{,}5$.

1) -7 2) -1 3) 0 4) 9

2. Из формулы цены товара $a = \frac{C}{n}$, где C — стоимость товара, n — количество товара, выразите стоимость C.

1) $C = \frac{a}{n}$ 2) $C = \frac{n}{a}$ 3) $C = a \cdot n$ 4) $C = a^2 n$

3. При движении тела по прямой его скорость $v(t)$ в $\frac{м}{с}$ изменяется по закону $v(t) = 7t + 11$ (t — время движения тела в секундах). Какова будет скорость тела через 2 секунды после начала движения?

1) $20\frac{м}{с}$ 2) $25\frac{м}{с}$ 3) $36\frac{м}{с}$ 4) $91\frac{м}{с}$

4. Соотнесите длину отрезка MN с соответствующей формулой (см. рис. 14).

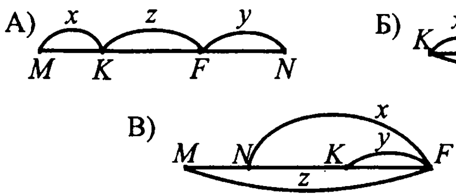


Рис. 14.

1) $MN = z - x + y$ 2) $MN = x + y + z$
3) $MN = z - x$ 4) $MN = z - (x + y)$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь правильного шестиугольника S в см^2 вычисляется по формуле $S = \frac{3}{2} \cdot a^2\sqrt{3}$ (a — длина стороны шестиугольника в см). Во сколько раз площадь первого шестиугольника меньше площади второго, если $a_1 = 2$ см, $a_2 = 4$ см?

1) $\sqrt{3}$ 2) 2 3) 3 4) 4

6. Из равенства $2a + 3{,}8b = \frac{a+b}{5}$ выразите a.

1) $a = 2b$ 2) $a = -\frac{2{,}8b}{9}$ 3) $a = -2b$ 4) $a = \frac{4{,}8b}{11}$

7. Задуманное число сначала увеличили на a, затем это же задуманное число уменьшили на b, полученные результаты сложили и получили c. Выразите задуманное число через a, b и c. Обозначив задуманное число буквой d, можно составить выражение:

1) $d = \frac{c-a+b}{2}$ 2) $d = \frac{c+a-b}{2}$

3) $d = \frac{a+b-c}{2}$ 4) $d = 2(b - a + c)$

8. Какое из буквенных выражений, представленных ниже, соответствует условию: «Целое число a — двузначное»?

1) $10 < 2a < 100$ 2) $10 \leqslant a < 100$
3) $a + 10 \leqslant 100$ 4) $10 < a \leqslant 100$

Вариант № 4

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}+1}$ при $m = 1{,}21$; $n = 0{,}01$.

Ответ: ______

2. Из формулы длины окружности $C = 2\pi R$ выразите число π.

Ответ: ______

3. При движении тела пройденный им путь $S(t)$ в метрах изменяется по закону $S(t) = t^3 + 3t$, где t — время движения тела в секундах. Какой путь пройдёт тело за 3 секунды?

1) 12 2) 16 3) 24 4) 36

4. Вычислите $(a - b)(a + b) - (a + b)(2a + b)$, если $a = 3$, $b = -2$.

1) 1 2) -5 3) 5 4) 8

5. Из равенства $3a - 2{,}4b = \dfrac{a + 72{,}9b}{4}$ выразите a.

1) $-2b$ 2) $7{,}5b$ 3) $2b$ 4) $5b$

6. Задуманное число d сначала увеличили на a, затем это же задуманное число умножили на b. Из первого результата вычли второй и получили c. Какое число d задумали?

1) $d = \dfrac{c+a}{a-b}$ 2) $d = \dfrac{a-c}{a+b}$

3) $d = \dfrac{c-a}{1-b}$ 4) $d = \dfrac{c-a}{a-b}$

7. Найдите такое число, чтобы его сумма с произведением этого числа на $\dfrac{2}{3}$ равнялась числу 60.

1) 36 2) 42 3) 56 4) 72

8. Площадь одной комнаты составляет $\dfrac{2}{7}$ всей площади квартиры. Чему равна площадь этой комнаты, если она на 25 м^2 меньше, чем площадь всей квартиры?

1) 10 2) 12 3) 8 4) 14

Вариант № 5

1. Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{p}+2}{\sqrt{q}}$ при $p = 0{,}49$; $q = 0{,}09$.

Ответ: ______

2. Модуль нормальной составляющей ускорения при движении по криволинейной траектории вычисляется по формуле $a_{\text{н}} = \dfrac{v^2}{R}$, где v — скорость движения, R — радиус кривизны траектории. Выразите из данной формулы скорость v.

Ответ: ______

3. Время t, затраченное катером на преодоление расстояния 100 км по течению реки и обратно, вычисляется по формуле $t = \dfrac{100}{v+2} + \dfrac{100}{v-2}$ (v км/ч — собственная скорость катера). Какое время займёт такое путешествие у катера с собственной скоростью 6 км/ч?

1) 50 ч 2) 37,5 ч 3) 75 ч 4) 12,5 ч

4. Соотнесите каждый из рисунков 15 с неравенством, которое из него следует.

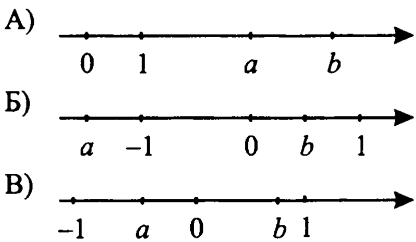


Рис. 15.

1) $b^2 < -a$ 2) $ab < a$ 3) $a + b > b - a$ 4) $\dfrac{a}{b} > \dfrac{b}{a}$

Ответ:

А	Б	В

5. Площадь поверхности сферы в м^2 вычисляется по формуле $S = 4\pi r^2$ (r — радиус сферы в м). Во сколько раз площадь поверхности сферы радиуса 6 м больше площади поверхности сферы радиуса 4 м?

1) 2,25 2) 1,5 3) 6π 4) 10

6. Из равенства $1{,}5k + 7n = \frac{4}{mn^2}$ выразите m.

1) $m = \frac{n^2}{4(1{,}5k + 7n)}$ 2) $m = \frac{1{,}5k + 7n}{4n^2}$

3) $m = \frac{4n^2}{1{,}5k + 7n}$ 4) $m = \frac{4}{n^2(1{,}5k + 7n)}$

7. Турист прошёл из точки A a км, потом прошёл b км в обратном направлении, после чего в первоначальном направлении он прошёл расстояние в 1,5 раза больше, чем весь пройденный до этого путь, и остановился в точке B. Выберите верное равенство.

1) $AB = a - b + 1{,}5(a - b)$ 2) $AB = a - b + 1{,}5(a + b)$

3) $AB = a + b + 1{,}5(a - b)$ 4) $AB = a - b - 1{,}5a + b$

8. a и b — цифры от 0 до 9, причём $b > a$. Выразите n через a и b, если n — трёхзначное число, цифры которого в порядке убывания разрядов равны a, b и $b - a$ соответственно. Какое из буквенных выражений, представленных ниже, соответствует условию задачи?

1) $n = 100a + 10b + (b - a)$ 2) $n = 100b + 10a + (b - a)$

3) $n = 100(b - a) + 10a + b$ 4) $n = 100(b - a) + 10b + a$

Вариант № 6

1. Найдите значение выражения $\frac{7}{x} + 6$ при $x = -\frac{5}{3}$.

Ответ: ______

2. Из формулы силы $F = am$ выразите массу m.

Ответ: ______

3. Одна сторона треугольника равна a см, вторая — 3 см, а третья — в два раза больше первой. Найдите периметр треугольника.

1) $P = 2(a + 3)$ 2) $P = 2a + 3$

3) $P = 3(a + 3)$ 4) $P = 3(a + 1)$

4. Найдите значение функции $f(x) = \frac{4x - 1}{x - 2} + 3$, если значение аргумента равно 3.

1) 20 2) 14 3) 2,5 4) 24

5. Если $-8m < 4n - 2$, то какие из перечисленных неравенств верны?

А) $m > 0{,}5n + 0{,}25$; Б) $m > -0{,}5n + 0{,}25$;
В) $m - 0{,}25 > -0{,}5n$; Г) $-m < 0{,}5n - 0{,}25$.

1) А 2) А, В 3) Б, В, Г 4) А, Г

6. Известно, что $\frac{1}{2} < a < 1$, $b > 2$. Какое из приведённых утверждений неверно?

1) $ab > 1$ 2) $ab^2 > a^4b$ 3) $\frac{b}{a} > b^2$ 4) $b > a^3$

7. Если задуманное число увеличить на 23 и результат разделить на 10, получится 7. Найдите это число.

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — задуманное число.

1) $(x - 23) \cdot 10 = 7$ 2) $10 \cdot (x + 23) = 7$
3) $(x + 23) : 10 = 7$ 4) $10 : (x + 23) = 7$

8. Пусть 20 кг яблок стоят x рублей. Сколько стоят 8 кг яблок?

1) $\frac{2}{5}x$ руб. 2) $\frac{5}{2}x$ руб. 3) $\frac{2}{5x}$ руб. 4) $\frac{5}{2x}$ руб.

§ 6. Буквенные выражения. Область допустимых значений буквенного выражения

Основные сведения

Алгебраическим (буквенным) выражением называется одна или несколько алгебраических величин (чисел и букв), соединенных между собой знаками алгебраических действий: сложения, вычитания, умножения и деления, извлечения корня и возведения в целую степень, а также скобками, определяющими порядок выполнения действий. Количество величин, входящих в алгебраическое выражение, должно быть конечным.

Значения переменных, при которых алгебраическое выражение имеет смысл, называют **допустимыми значениями** переменных. Множество всех допустимых значений переменных называют **областью определения** алгебраического выражения.

Если соответственные значения двух выражений с одинаковой областью определения, содержащих одни и те же переменные, совпадают при всех допустимых значениях переменных, то выражения называют **тождественно равными**.

Тождеством называют равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных.

Демонстрационный вариант

1. Даны выражения:

А) $\frac{6}{b-6}$; Б) $\frac{5b+1}{6+b}$; В) $\frac{b}{6+b}+\frac{5}{b}$.

Какие из выражений не имеют смысла при $b=-6$?

1) А; В 2) только Б 3) Б; В 4) только В

Решение. Каждое из предложенных выражений **не имеет** смысла в случае, когда знаменатель дроби, входящей в выражение, обращается в ноль. При $b=-6$ в ноль обращается знаменатель в выражениях Б и В. Следовательно, из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Из выражений $a)\,\dfrac{n+\frac{1}{n}}{2}$; $\quad b)\,\dfrac{n}{2}+n$; $\quad c)\,\dfrac{2n}{n+2}$; $\quad d)\,\dfrac{2}{1+\frac{1}{n^2}}$

выберите те, которые имеют смысл при любом значении n.

1) b 2) a; b 3) b; d 4) b; c

Решение. Выражение a не имеет смысла при $n = 0$; выражение b имеет смысл при любых значениях n; выражение c не имеет смысла при $n = -2$; выражение d не имеет смысла при $n = 0$. Следовательно, из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Укажите все значения c, при которых выражение $\dfrac{c+3}{c(c-1)}$ не имеет смысла.

1) 3 2) 0; 3 3) 1 4) 0; 1

Решение. Заданное выражение не имеет смысла, когда $c(c-1)=0$, то есть $c=0$ или $c=1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. Какая пара чисел является **недопустимой** для дроби
$\dfrac{x^2-4xy+y^3}{2x-y}$?

1) $(-2;1)$ 2) $(2;-1)$ 3) $\left(-\frac{1}{2};1\right)$ 4) $\left(\frac{1}{2};1\right)$

Решение. Для данной дроби недопустимыми являются числа, при которых знаменатель дроби обращается в 0. Подставляя в выражение $2x-y$ соответствующие значения из предложенных пар чисел, получаем, что только при $x=\dfrac{1}{2}$, $y=1$ выражение не имеет смысла.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. При каких значениях x дробь $\dfrac{5x}{x^2-36}$ не имеет смысла?

Решение. Дробь не имеет смысла, когда её знаменатель равен нулю. Следовательно, заданное выражение не имеет смысла при $x=-6$ и $x=6$.

Ответ: -6; 6.

6. Найдите все допустимые значения y для дроби $\dfrac{y(y+1)}{3(y-2)(y^2+9)}$.

1) $y \neq 2$ 2) $y \neq \pm 3$ 3) $y \neq 2,\ y \neq 3$ 4) $y \neq 0,\ y \neq -1$

Решение. Допустимыми значениями y является всё множество R за исключением тех значений y, при которых знаменатель дроби обращается в 0. Из уравнения $3(y-2)(y^2+9)=0$ находим $y=2$. Следовательно, заданное выражение имеет смысл при $y \neq 2$. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

7. Найдите числа, при которых знаменатель дроби $\dfrac{2x-6}{x^2+6x+9}$ равен 0.

1) 0 2) -3 3) 3 4) таких чисел нет

Решение. Решим уравнение $x^2+6x+9=0$; $(x+3)^2=0$; $x=-3$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{1}{x^2-8x}$; Б) $\dfrac{4}{x^2+9}$; В) $\dfrac{2x}{4x-8}$

с областью его определения.

1) $x \neq 2$ 2) любое число 3) $x \neq 8,\ x \neq 0$ 4) $x \neq 0,\ x \neq 2$

Решение. Областью определения выражения А является множество R за исключением значений x, при которых $x^2-8x=0$. Следовательно, выражение определено при $x \neq 8$ и $x \neq 0$, что соответствует ответу 3).

Областью определения выражения Б является всё множество R (знаменатель данного выражения всегда положителен), что соответствует ответу 2).

Областью определения выражения В является множество R за исключением значений x, при которых знаменатель $4x-8=0$. Следовательно, выражение определено при $x \neq 2$, что соответствует ответу 1).

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Вариант № 1

1. Даны выражения:

А) $\dfrac{t+1}{t}$; Б) $\dfrac{2t}{t+1}$; В) $\dfrac{10}{3t+3}$.

Какие из этих выражений не имеют смысла при $t=-1$?

1) только А 2) А; Б; В 3) А; Б 4) Б; В

2. Из выражений

$a = \dfrac{t^2-1}{2t+3}$; $\quad b = \dfrac{3t-2}{2t+1}$; $\quad c = \dfrac{10}{2t-1}$; $\quad d = \dfrac{1-t^2}{t}$

выберите те, которые имеют смысл для всех $t > 0$.

1) a, b 2) b, d 3) c 4) a, b, d

3. Укажите все значения a, при которых выражение $\dfrac{a}{3-a} - \dfrac{3}{2-a}$ не имеет смысла.

1) $a = 0$ 2) $a = 3$; $a = 2$ 3) $a \leqslant 3$ 4) $a \geqslant 2$

4. Укажите все значения b, при которых равенство $\dfrac{3}{b-1} = \dfrac{3b}{b^2-b}$ не имеет смысла.

1) $b = 1$ 2) $b = 0$ 3) $b = 1$; $b = 0$ 4) $b > 1$

5. При каких значениях x дробь $\dfrac{x+1}{x^2-1}$ не имеет смысла?

Ответ: ______

6. Найдите допустимые значения x для дроби $\dfrac{(x+2)(x+3)}{x^2+2x-15}$.

1) $x \neq -5$ 2) $x \neq -2$; $x \neq 3$
3) $x \neq -5$; $x \neq 3$ 4) $x \neq -2$; $x \neq -5$

7. Найдите числа, при которых знаменатель дроби $\dfrac{3x-3}{x^2-1}$ равен 0.

1) 1 2) ± 1 3) -1 4) таких чисел нет

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x-2}$; Б) $\dfrac{x-2}{2x-1}$; В) $\dfrac{2x-4}{x}$

с его областью определения.

1) любое число 2) $x \neq 0$; $x \neq 2$ 3) $x \neq 0{,}5$ 4) $x \neq 0$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Даны выражения: А) $\dfrac{c+1}{c+4}$; Б) $\dfrac{c-3}{c-4}$; В) $2 - \dfrac{1}{4-c}$.

Какие из этих выражений не имеют смысла при $c = 4$?

1) только Б 2) А; Б 3) А; В 4) Б; В

2. Укажите выражение, которое имеет смысл при любых значениях параметра b.

1) $\dfrac{b+1}{b-1}$ 2) $\dfrac{b+2}{7b}$ 3) $\dfrac{b-3}{b^2+1}$ 4) $\dfrac{\frac{2}{b}+1}{3}$

3. Укажите выражение, которое не имеет смысла при некоторых значениях переменной m.

1) $-\sqrt{m^2+1}$ 2) $(\sqrt{100m})^2$ 3) $\sqrt{4|m|}$ 4) $\sqrt{2m^2}$

4. Какие из выражений $a = \dfrac{3x}{x+7}$; $b = \left(x - \dfrac{1}{x+7}\right) \cdot \dfrac{x+7}{x}$; $c = \dfrac{x+7}{7x}$ не имеют смысла при $x = -7$?

1) только a 2) только b 3) a; c 4) a; b

5. Укажите выражение, которое имеет смысл при любых значениях переменной m.

1) $\dfrac{3}{m} - 1$ 2) $\dfrac{3}{m-1}$ 3) $\dfrac{m-1}{3}$ 4) $\dfrac{m-1}{3m}$

6. Из приведенных выражений укажите то выражение, которое имеет смысл.

1) $\sqrt{-144}$ 2) $-\sqrt{(-3)^3}$ 3) $\sqrt{-(-1)^6}$ 4) $\sqrt{-(-1)^7}$

7. Укажите выражение, которое имеет смысл при $x = -4$.

1) $\dfrac{x+4}{x^2-16}$ 2) $\dfrac{16}{16+x^2}$ 3) $\dfrac{12}{\sqrt{4+x}}$ 4) $\dfrac{1}{1+\frac{4}{x}}$

8. При каких значениях x имеет смысл выражение $\sqrt{2-5x}$?

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Даны выражения:

А) $\dfrac{m}{m+2}$; Б) $\dfrac{m}{4} - \dfrac{4}{m}$; В) $m + 2 - \dfrac{1}{m^2}$.

Какие из этих выражений не имеют смысла при $m = 0$?

1) А; Б; В 2) только А 3) Б; В 4) А; Б

2. Из выражений

$$a=\frac{n^2+2n+1}{n+2};\quad b=\frac{(n-2)^2}{n-2};\quad c=\frac{7}{(n+5)^2};\quad d=\frac{7n}{12}+n$$

выберите те, которые имеют смысл при любом значении n.

1) a 2) $b; d$ 3) b, c, d 4) d

3. Укажите все значения c, при которых выражение $\frac{c+8}{c(c+8)}$ не имеет смысла.

1) $c=0$ 2) $c=8$ 3) $c=0$; $c=-8$ 4) $c=-8$; $c=8$

4. Какая пара чисел является недопустимой для дроби $\frac{3a^2-7a+14b}{a+2b}$?

1) $a=2$; $b=-1$ 2) $a=-1$; $b=2$
3) $a=0$; $b=1$ 4) $a=-1$; $b=1$

5. При каких значениях y дробь $\frac{28}{y^2-64}$ не имеет смысла?

Ответ: ______

6. Найдите все допустимые значения z для дроби $\frac{z(z-11)}{(z^2+3)(2z-24)}$.

1) $z \neq \pm 3$ 2) $z \neq 12$
3) $z \neq \pm 3$; $z \neq 12$ 4) z – любое действительное число

7. Найдите числа, при которых знаменатель дроби $\frac{17-x}{x^2+36}$ равен 0.

1) 6 2) -6 3) ± 6 4) таких чисел нет

8. Соотнесите каждое выражение

А) $5x+\frac{x^3}{x(x-3)}$; Б) $\frac{1}{x^2+4}$; В) $\frac{2}{x^2-4}$

с его областью определения.

1) любое число 2) $x \neq 0; x \neq 3$
3) $x \neq -2$; $x \neq 2$ 4) $x \neq 0; x \neq -3$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Даны выражения:

А) $\frac{n}{n+1}$; Б) $\frac{4}{n} - \frac{3}{n^2-1}$; В) $n^2 + \frac{1}{n^2-4}$.

Какие из этих выражений имеют смысл при $n = -1$?

1) Б; В 2) только Б 3) только В 4) А; В

2. Из выражений

$a = \frac{k^3+k}{k+1}$; $b = \frac{(k+1)^2}{k+3}$; $c = \frac{k^2}{4} + k$; $d = \frac{k^2+1}{(k-1)^2}$

выберите те, которые имеют смысл при любом значении k.

1) только d 2) только c 3) a; c 4) a, b, c, d

3. Укажите все значения x, при которых выражение $\frac{x^2-1}{(x+1)(x+2)}$ не имеет смысла.

1) $x = -1$

2) $x = -1$; $x = -2$

3) $x = -2$

4) $x = -2$; $x = -1$; $x = 1$

4. Какая пара чисел является недопустимой для дроби $\frac{2a^2 - 5ab + 2b^2}{2a - 3b}$?

1) $a = 2$; $b = 1$ 2) $a = 4$; $b = 3$
3) $a = 6$; $b = 4$ 4) $a = 2$; $b = 4$

5. Найдите все допустимые значения b для дроби $\frac{b^2-4}{(b-2)\sqrt{b-1}}$.

Ответ: ______

6. При каком значении x дробь $\frac{x}{x^2-4}$ не имеет смысла?

1) 0 2) 2 3) 3 4) 4

7. Найдите числа, при которых знаменатель дроби $\frac{x^2-9}{x^2-1}$ равен 0.

1) ± 3 2) ± 2 3) нет таких чисел 4) ± 1

5. Зак № 199

8. Соотнесите каждое выражение

А) $5\sqrt{a}+\dfrac{a^5}{a+2}$; Б) $\dfrac{2a}{\sqrt{a^2+9}}$; В) $\dfrac{a+1}{a^2-1}$

с областью его определения.

1) $a\neq -3$; $a\neq +3$ 2) любое число
3) $a\geqslant 0$ 4) $a\neq 1$; $a\neq -1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Даны выражения: $M=\dfrac{1}{m^2-1}$; $N=\dfrac{m-1}{m(m+1)}$; $P=\dfrac{m(m+1)}{m-1}$. Какие из этих выражений определены при $m=0$?

1) только M 2) только N 3) M; P 4) только P

2. Из предложенных выражений выберите те, которые при $x=3$ не определены, а при всех $x\neq 3$ определены.

$a=\dfrac{x-3}{x+4}+2,\ b=\dfrac{x}{x-3}-\dfrac{x-3}{x},\ c=\dfrac{x}{3}-1,\ d=\dfrac{x+4}{x-3}-2.$

1) a; d 2) d; c 3) только d 4) только b

3. Найдите все значения a, принадлежащие области определения выражения $\dfrac{a-3}{(a^2-4)(a+4)}$.

1) $a\neq \pm-3, a\neq 4$ 2) $a\neq \pm 2, a\neq 3$
3) $a\neq \pm 2, a\neq -4, a\neq 3$ 4) $a\neq \pm 2, a\neq -4$

4. Какая пара чисел является допустимой для дроби $\dfrac{(a-4)(b-1)}{a^2-ab-2b^2}$?

1) $a=-3, b=-1{,}5$ 2) $a=4, b=1$
3) $a=4, b=-4$ 4) $a=1, b=-1$

5. Определите, при каких значениях x дробь $\dfrac{x+5}{(x^2+3x-4)x}$ не имеет смысла.

Ответ: ______

6. Найдите все допустимые значения c для дроби $\dfrac{(c^2+1)(c-4)}{(c^2-16)(c+7)}$.

1) $c \neq -4, c \neq 7$

2) $c \neq \pm 4$

3) $c \neq \pm 4, c \neq \pm 1, c \neq 7$

4) $c \neq \pm 4, c \neq -7$

7. Найдите числа, при которых знаменатель дроби

$\dfrac{b-14}{(b^2+14)(b^2-12b-28)}$ равен 0.

1) $14; -2$ 2) $7\sqrt{14}; -2; 14$ 3) 2 4) таких чисел нет

8. Соотнесите каждое выражение с областью его определения.

А) $\dfrac{x^2-4}{x^2+9} - 3$; Б) $x^2 + 9 - \dfrac{1}{x^2-9}$; В) $\dfrac{x+3}{x-3} + 3$.

1) $x \neq \pm 3$ 2) x – любое число 3) $x \neq \pm 2, x \neq \pm 3$ 4) $x \neq 3$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Даны выражения:

А) $\dfrac{a}{a+2}$; Б) $\dfrac{a-1}{a^2-4}$; В) $\dfrac{a+2}{a-2}$; Г) $\dfrac{2}{a} - \dfrac{4}{a^2+4}$

Какие из этих выражений имеют смысл при $a = -2$?

1) А; В 2) Б; В 3) только Г 4) В; Г

2. Укажите выражение, которое имеет смысл при любых значениях переменной k.

1) $1 - \dfrac{5}{k}$ 2) $\dfrac{2}{3 - \dfrac{4}{k-1}}$ 3) $\dfrac{6 - \dfrac{5}{k+2}}{4}$ 4) $\dfrac{3k}{2} - 3$

6. Зак. № 199

3. Укажите выражение, которое имеет смысл при всех неотрицательных значениях a.

1) $\frac{3}{\sqrt{2a}}$ 2) $\frac{5}{\sqrt{a}-2}$ 3) $\sqrt{2a-1}$ 4) $4\sqrt{5a}$

4. Даны выражения: А) $\frac{x+8}{8x}$; Б) $\frac{8x}{x+8}$; В) $\frac{x+\frac{8}{x}}{8}$.

Какие из этих выражений не имеют смысла при $x=0$?

1) только А 2) только Б 3) А; В 4) А; Б; В

5. Из предложенных пар чисел $(c; d)$ выберите ту, которая является недопустимой для алгебраической дроби $\frac{32c^2+2c-3d+11}{c^2-4d^2}$.

1) $c=1$; $d=2$ 2) $c=4$; $d=2$ 3) $c=3$; $d=1$ 4) $c=4$; $d=3$

6. Укажите выражение, которое имеет смысл при любых положительных значениях переменной m.

1) $\frac{3m+1}{3m-4}$ 2) $\frac{3m-1}{3m+1}$ 3) $\frac{1}{3m-1}$ 4) $\frac{1}{(3m-2)(3m+1)}$

7. Укажите выражение, которое не имеет смысла при некоторых значениях переменной m.

1) $-\sqrt{m^2+1}$ 2) $\left(\sqrt{100m}\right)^2$ 3) $\sqrt{4|m|}$ 4) $\sqrt{2m^2}$

8. Из перечисленных ниже значений переменной x выберите те, при которых существует функция $y=\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$.

1) $x=1$; $x=2$ 2) $x=3$ 3) $x=1$ 4) $x=2$

§ 7. Степень с целым показателем

Основные сведения

Свойства степени с целым показателем.

$a^n \cdot a^k = a^{n+k}$.

$a^n : a^k = a^{n-k}$, если $n > k$.

$(a^n)^k = a^{nk}$.

$a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, $b \neq 0$.

По определению полагают, что $a^0 = 1$ для любого $a \neq 0$.

Если $a \neq 0$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, где n — натуральное число.

Справедливо равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Демонстрационный вариант

1. Вычислите $(a^2)^{-3} \cdot a^9$.

1) a^4 2) a^3 3) a^{15} 4) a^8

Решение. $(a^2)^{-3} \cdot a^9 = a^{2\cdot(-3)} \cdot a^9 = a^{-6} \cdot a^9 = a^{-6+9} = a^3$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Представьте выражение $\frac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}}$ в виде степени с основанием t ($t \neq 0$).

1) t^{-11} 2) t^{-19} 3) t^{-5} 4) t^{-13}

Решение. $\frac{(t^4)^{-2}}{t^{-3}} = \frac{t^{4\cdot(-2)}}{t^{-3}} = \frac{t^{-8}}{t^{-3}} = t^{-8-(-3)} = t^{-5}$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Найдите значение выражения $\frac{4}{x^3}\cdot\frac{5}{x^{-5}}$ при $x=-\frac{1}{2}$.

1) -5 2) 5 3) $\frac{5}{8}$ 4) 80

Решение. $\frac{4}{x^3}\cdot\frac{5}{x^{-5}}=\frac{4\cdot5}{x^3\cdot x^{-5}}=\frac{20}{x^{3-5}}=\frac{20}{x^{-2}}=20x^2.$

Подставляя в полученное выражение значение $x=-\frac{1}{2}$, получим $20\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2=20\cdot\frac{1}{4}=5.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $\frac{m^{-2}\cdot n^5}{m^{-4}\cdot(n^{-1})^5}$.

1) $m^{-6}n^{10}$ 2) m^2n 3) m^2 4) m^2n^{10}

Решение. $\frac{m^{-2}\cdot n^5}{m^{-4}\cdot(n^{-1})^5}=\frac{m^{-2}\cdot n^5}{m^{-4}\cdot n^{-5}}=m^{-2-(-4)}n^{5-(-5)}=m^2n^{10}.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Во сколько раз $3{,}84\cdot10^3$ меньше, чем $1{,}496\cdot10^4$? Результат округлите до десятых.

1) 0,3 2) 2,6 3) 13,9 4) 3,9

Решение. Для того чтобы определить, во сколько раз $3{,}84\cdot10^3$ меньше, чем $1{,}496\cdot10^4$, найдём частное $\frac{1{,}496\cdot10^4}{3{,}84\cdot10^3}=\frac{1{,}496\cdot10}{3{,}84}\approx3{,}9.$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(27^2\cdot3^{-8})^{-1}$.

1) $(-5;-1)$ 2) $(5;12)$ 3) $\left(\frac{1}{3};4\right)$ 4) $(10;12)$

Решение. $(27^2\cdot3^{-8})^{-1}=\left((3^3)^2\cdot3^{-8}\right)^{-1}=(3^{3\cdot2}\cdot3^{-8})^{-1}=$
$=(3^6\cdot3^{-8})^{-1}=(3^{6-8})^{-1}=(3^{-2})^{-1}=3^{-2\cdot(-1)}=3^2=9.$

Следовательно, значение заданного выражения принадлежит промежутку 2) $(5;12)$.

Ответ: 2.

7. Среди чисел $\left(\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(\frac{1}{3}\right)^4$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$, $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ 2) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ 3) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}$ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$

Решение. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \left(-\frac{3}{1}\right)^4 = (-1)^4 \cdot 3^4 = 3^4.$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{1}\right)^3 = (-1)^3 \cdot 3^3 = -3^3.$

Так как $\left(\frac{1}{3}\right)^3 < 1$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4 < 1$, то наибольшим из предложенных чисел является ответ 4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}$.

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0$; Б) $(a^2 \cdot a^{-3})^5$; В) $\frac{(a^{-2})^3}{a^5}$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$):

1) a 2) a^{-1} 3) a^{-11} 4) a^{-5}

Решение. Упростим каждое из предложенных выражений.

$(a^2)^{-3} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{2\cdot(-3)} \cdot a^5 \cdot a^0 = a^{-6} \cdot a^5 \cdot 1 = a^{-6+5} = a^{-1}$. Соответствует выражению 2).

$(a^2 \cdot a^{-3})^5 = (a^{2-3})^5 = (a^{-1})^5 = a^{-5}$. Соответствует выражению 4).

$\frac{(a^{-2})^3}{a^5} = \frac{a^{-6}}{a^5} = a^{-6-5} = a^{-11}$. Соответствует выражению 3).

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Вариант № 1

1. Вычислите $3^5 \cdot \frac{1}{3^2} \cdot 3^{-3}$.

1) 1 2) 81 3) 3 4) 9

2. Представьте выражение $\frac{(a^5 \cdot a^{-2})^6}{a^4}$, где $a \neq 0$ в виде степени с основанием a.

1) a^{14} 2) a^7 3) a^6 4) a^3

3. Найдите значение выражения $3x^2 : \frac{1}{(2x)^3} \cdot \frac{1}{3x}$ при $x = -\frac{1}{2}$.

1) 4 2) $-\frac{1}{2}$ 3) 0,5 4) 2

4. Упростите выражение $\frac{x^2y^3}{y^{-2}} \cdot \frac{x^{-3}}{y^4}, y \neq 0, x \neq 0$.

1) $\frac{1}{xy^3}$ 2) $\frac{y}{x}$ 3) $\frac{x^5}{y^5}$ 4) 1

5. Согласно результатам демографических исследований в 1244 году население Москвы как типичного городка Средневековья насчитывало около $10{,}9 \cdot 10^3$ чел., а согласно прогнозам к 2068 году численность Москвы будет составлять $22{,}1 \cdot 10^6$ чел. Во сколько раз возрастёт численность населения Москвы за рассматриваемый период? Ответ округлите до целых.

1) 49 2) 493 3) 202 4) 2028

6. Замените X таким выражением, чтобы равенство

$X \cdot \left(-\frac{5a^3c^4}{b^2}\right) = \frac{b^3c^2}{2a^{-1}}$ выполнялось для любых значений a, b, c, отличных от ноля.

1) $-\frac{b^5}{10a^2c^2}$ 2) $-\frac{5a^2bc^6}{2}$ 3) $-\frac{2a}{5bc^6}$ 4) $\frac{b^6c^2}{10a^2}$

7. Среди чисел $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$; 3^{-2}; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ найдите наибольшее.

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)^2$ 2) 3^{-2} 3) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(2a^{-1}b^2)^3$; Б) $2\frac{(a^2b^4)^2}{b^3a}$; В) $2\left(\frac{a}{b}\right)^2 : \frac{a^3b^{-3}}{b}$ $(a > 0, b > 0)$

с тождественно равным ему выражением:

1) $2a^3b^5$ 2) $2\frac{a^5}{b^6}$ 3) $8\frac{b^6}{a^3}$ 4) $2\frac{b^2}{a}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Представьте выражение $\dfrac{(a^7a^{-3})^{-2}}{a^{-6}}$ в виде степени.

1) a^2 2) a^{-4} 3) a^8 4) a^{-2}

2. Упростите выражение $(2a^2b)^3$.

1) $2a^6b^3$ 2) $8a^6b^3$ 3) $2a^5b^3$ 4) $8a^5b^3$

3. Упростите выражение $\left(\dfrac{a^{-3}b^4}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{5}{a^{-2}b^3}\right)^{-2}$, $b \neq 0$.

1) $0{,}08a^{-7}b^{10}$ 2) $0{,}008a^{-7}b^{10}$
3) $\dfrac{5b^{-2}}{a}$ 4) $\dfrac{b^{-2}}{5a}$

4. Найдите значение выражения $8^{3a}\cdot 16^{-2a}$ при $a = -2$.

1) 4 2) $\dfrac{1}{4}$ 3) $-\dfrac{1}{4}$ 4) 8

5. Сравните x^2 и x^3, если известно, что $0 < x < 2$.

1) $x^2 > x^3$ 2) $x^2 < x^3$
3) $x^2 = x^3$ 4) для сравнения не хватает данных

6. Найдите значение выражения $(2{,}4\cdot 10^{-3})\cdot(3\cdot 10^{-2})$.

1) 7 200 000 2) 0,000 72 3) 0,000 072 4) 0,000 007 2

7. Масса клетки бактерии $1{,}2\cdot 10^{-12}$ кг. Выразите эту массу в миллиграммах.

1) $1{,}2\cdot 10^{-9}$ мг 2) $1{,}2\cdot 10^{-7}$ мг
3) $1{,}2\cdot 10^{-6}$ мг 4) $1{,}2\cdot 10^{-3}$ мг

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(a^2a^5)^3$; Б) $a^4(a^3)^3$; В) $\left(\dfrac{a^5}{a^3}\right)^4$

с тождественно равным ему выражением (при $a \neq 0$):

1) a^8 2) a^{21} 3) a^{16} 4) a^{13}

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Вычислите $3^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot 3^0$.

1) 243   2) $\frac{1}{3}$ 3) 3   4) 0

2. Представьте выражение $\frac{(c^3)^{-2} \cdot c}{c^{-8}}$, $c > 0$ в виде степени с основанием c.

1) c^{10} 2) c^3 3) c^{-2} 4) c^{-1}

3. Найдите значение выражения $\frac{3}{x^5} \cdot x^3 : x^{-2}$ при $x = 0{,}001$.

1) 0,003   2) 0,03   3) 3   4) 0,3

4. Упростите выражение $(ab)^7 : \left(\frac{a}{b}\right)^3$, $b \neq 0, a \neq 0$.

1) a^4b^{10} 2) $(ab)^4$ 3) $a^{10}b^4$ 4) a^4b^{-4}

5. Масса Земли равна $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Луны — $7{,}35 \cdot 10^{25}$ граммов. Во сколько раз масса Земли больше массы Луны? Результат округлите до сотых.

1) 0,12   2) 0,1   3) 81,36   4) 8136,05

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(5 \cdot 3)^2 - \big((-5) : (-3)\big)^{-2}$.

1) $[224; 225)$ 2) $(-200; -195)$ 3) $(0; 4]$ 4) $[225; 226]$

7. Среди чисел $0{,}5^2$; $0{,}5^3$; $(-0{,}5)^{-5}$; $(-0{,}5)^{-6}$ найдите наибольшее.

1) $0{,}5^2$ 2) $0{,}5^3$ 3) $(-0{,}5)^{-5}$ 4) $(-0{,}5)^{-6}$

8. Соотнесите каждое выражение ($n > 0$)

А) $(n^{-1})^2 \cdot n^0 \cdot n^2$;   Б) $\frac{(n^{-5})^{-2}}{n^4n^2}$;   В) $(n^{-5})^2 \cdot n^{-4} \cdot n^{-2}$

с тождественно равным ему выражением:

1) n^{-16} 2) n^4 3) n^{-13} 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Вычислите $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot 2^4$.

1) 1 2) 2 3) 0 4) 4

2. Представьте выражение

$\frac{(a^2)^{-3} \cdot a^{10}}{a^3}$ $(a \neq 0)$ в виде степени с основанием a.

1) a^8 2) a^{13} 3) a 4) a^{12}

3. Найдите значение выражения $t^7 \cdot \frac{4}{t^5} : t^3$ при $t = 2$.

1) 8 2) 128 3) 0,5 4) 2

4. Упростите выражение $3(a^2b)^3 \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^5$.

1) $27a^{11} \cdot b^{-2}$ 2) $27a^{-2} \cdot b^{-2}$

3) $\frac{3a^{11}}{b^2}$ 4) $\frac{3a^8}{b^2}$

5. Население Франции составляет 65 млн человек, а население Швеции — 9 млн человек. Во сколько раз население Франции больше населения Швеции? Результат округлите до сотых.

1) 7,22 2) 0,14 3) 8,12 4) 6,23

6. Укажите промежуток, которому принадлежит значение выражения $(6 \cdot 2)^2 - (-6) : (-2)^3$.

1) $(20; 80)$ 2) $[80; 100]$ 3) $(90; 110)$ 4) $[110; 150]$

7. Из чисел $(-0{,}3)^2$, $(-0{,}3)^3$, $(-0{,}3)^4$, $(-0{,}3)^5$ выберите наибольшее.

1) $(-0{,}3)^2$ 2) $(-0{,}3)^3$ 3) $(-0{,}3)^4$ 4) $(-0{,}3)^5$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $(n^{-2})^2 \cdot n^4 \cdot n^0$; Б) $\frac{(n^{-3})^5}{n^{-14} \cdot n^2}$; В) $\frac{(n^2)^3}{n^3} \cdot n^{-4}$,

$(n \neq 0)$ с тождественно равным ему выражением:

1) $\frac{1}{n^3}$ 2) $\frac{1}{n}$ 3) $\frac{1}{n^2}$ 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Вычислите $6^2 \cdot (0{,}5)^3 \cdot 3^1$.

1) 864 2) 4,5 3) 27 4) 13,5

2. Найдите k, если $a^k = \dfrac{a^{-3} \cdot (a^2)^4}{a^{-5}}$ при $a \neq 1$.

1) 6 2) 0 3) 10 4) 7

3. Найдите значение выражения $m^2 \cdot \left(\dfrac{m}{2}\right)^{-3} \cdot (m^5)^0$ при $m = 8$.

1) 1 2) 8 3) 64 4) 0,125

4. Какое из следующих выражений при $a \neq 0$, $c \neq 0$ тождественно равно выражению $\dfrac{(a^2c)^3}{c^4} \cdot \left(\dfrac{c^2}{a}\right)^2$?

1) a^3c^3 2) a^5c^3 3) a^4c^3 4) a^4c

5. Макароны нужно варить $1{,}5 \cdot 10^1$ минут, а горох — $1{,}8 \cdot 10^2$ минут. Во сколько раз дольше нужно варить горох, чем макароны?

1) $\dfrac{5}{60}$ 2) $\dfrac{50}{6}$ 3) 12 4) 1,2

6. Найдите промежуток, которому принадлежит значение выражения $2^3 \cdot 3^2 - 2^2 \cdot 3^3$.

1) $[35; 36]$ 2) $[-36; -35]$ 3) $[0; 1]$ 4) $[-1; 0]$

7. Найдите наименьшее из чисел: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$, $(-3)^{\frac{1}{3}}$, $(-3)^{-3}$, $(-3)^{-2}$.

1) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$ 2) $(-3)^{\frac{1}{3}}$ 3) $(-3)^{-3}$ 4) $(-3)^{-2}$

8. Соотнесите каждое из выражений

$А = \left((k^2)^{-3} \cdot k^4\right)^{-1}$; $Б = \dfrac{k^{-3} \cdot k^5}{k^2} : k^{-1}$; $В = \dfrac{\left((k^3)^{-2} \cdot k\right)^{-1}}{k^{-5}}$

с тождественно равным ему выражением при $k \neq 0$:

1) k 2) k^{10} 3) k^2 4) 1

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Запишите выражение $\dfrac{\left(2^9\right)^6 \cdot 16^{-4}}{2^{42}}$ в виде степени числа 2.

1) 2^{-27} 2) 2^8 3) 2^{-21} 4) 2^{-4}

2. Найдите значение выражения $\left(a^{-5}\right)^2 \cdot a^8$ при $a = 3$.

1) 3 2) $\frac{1}{9}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 9

3. Упростите выражение $\left(4a^5b^{-7}\right) : \dfrac{2a^3b^{-5}}{5}$, если $a \neq 0, b \neq 0$.

1) $1{,}6a^8b^{-12}$ 2) a^2b^{-2} 3) $10a^2b^{-2}$ 4) $16a^8b^{-12}$

4. Найдите неверное равенство при $n \neq 0, m \neq 0$.

1) $\left(\dfrac{m^3}{m^2}\right)^5 = m^5$ 2) $a^2(n^5m)^3 = a^2n^{15}m^3$

3) $\dfrac{m^6}{(n^3)^2} = \dfrac{m^6}{n^5}$ 4) $\dfrac{(n^2)^4}{m^8} = \left(\dfrac{n}{m}\right)^8$

5. Сравните числа b^2 и b^5, если $0 < b < 1$.

1) $b^2 > b^5$ 2) $b^2 < b^5$
3) $b^2 = b^5$ 4) для ответа не хватает данных

6. Найдите значение выражения $\left(8 \cdot 10^{-7}\right) \cdot \left(0{,}2 \cdot 10^5\right)$.

1) 160 2) 0,016 3) 1600 4) 0,0016

7. Точность изготовления микросхем в современных лабораториях достигает $6{,}3 \cdot 10^{-9}$ см. Выразите эту величину в миллиметрах.

1) 0,000 000 006 3 2) 0,000 000 063 3) 0,000 000 63 4) 0,006 3

8. Соотнесите каждое выражение

$A = (2a^{-3})^3 \cdot (a^2)^2$; $\quad Б = \dfrac{a^{-5} \cdot (-2a)^4}{-2a^4}$; $\quad В = \dfrac{1}{8}a^4 \cdot (2a^{-3})^3$

с тождественно равным ему выражением:

1) $-\dfrac{8}{a^5}$ 2) a^{-5} 3) $\dfrac{8}{a^5}$ 4) $\dfrac{8}{a^{-5}}$

Ответ:

А	Б	В

§ 8. Многочлены. Преобразование выражений

Основные сведения

Одночленом называют выражение, которое содержит числа, натуральные степени переменных и их произведения.

Одночлен называется представленным в **стандартном виде**, если он записан в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней различных переменных.

Числовой множитель у одночлена стандартного вида называется **коэффициентом одночлена**, сумму показателей степеней переменных называют **степенью одночлена**.

Многочленом называется алгебраическая сумма одночленов.

Если все одночлены в многочлене приведены к стандартному виду и нет подобных слагаемых, то говорят, что это многочлен **стандартного вида**.

Формулы преобразования многочленов.

Для любых a, b и с верны следующие равенства:

1. $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
2. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
3. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
4. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
5. $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
6. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
7. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
8. $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Демонстрационный вариант

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(x - 4)(1 - y)$?

1) $-(4 - x)(y - 1)$ 2) $-(x - 4)(1 - y)$

3) $-(x - 4)(y - 1)$ 4) $(4 - y)(x - 1)$

Решение. Рассмотрим каждое из предложенных выражений.

1) $-(4 - x)(y - 1) = -(-(x - 4))(-(1 - y)) = -(x - 4)(1 - y)$ не равно тождественно $(x - 4)(1 - y)$.

2) $-(x - 4)(1 - y)$ не равно тождественно $(x - 4)(1 - y)$.

3) $-(x-4)(y-1) = -(x-4)(-(1-y)) = (x-4)(1-y)$ тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

4) $(4-y)(x-1) = 4x - yx + 4x - 4$ не равно тождественно $(x-4)(1-y) = x - xy + 4y - 4$.

Из представленных выражений только третье тождественно равно $(x-4)(1-y)$.

Ответ: 3.

2. Упростите выражение $(3-4a)^2 + 8a(3-2a)$.

1) 9 2) $-48a - 32a^2$ 3) $9 - 32a^2$ 4) $9 - 48a$

Решение. $(3-4a)^2+8a(3-2a) = 3^2-2\cdot3\cdot4a+(4a)^2+3\cdot8a-2a\cdot8a =$
$= 9 - 24a + 16a^2 + 24a - 16a^2 = 9$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Найдите числовое значение многочлена $3x^2 - 7xy + 4y^2$ при $x = 2$, $y = -1$.

1) -4 2) 2 3) 30 4) -2

Решение. $3x^2 - 7xy + 4y^2 = (3x^2 - 3xy) - (4xy - 4y^2) =$
$= 3x(x-y) - 4y(x-y) = (x-y)(3x-4y)$.

Подставляя в полученное выражение значения $x = 2$, $y = -1$, получим $(2-(-1))(3\cdot2-4\cdot(-1)) = 3\cdot(6+4) = 3\cdot10 = 30$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Приведите выражение $y(y-9) - (3-2y)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $5y^2 + 3y - 9$ 2) $5y^2 - 21y - 9$ 3) $-3y^2 + 3y - 9$ 4) $y - 9$

Решение. $y(y-9) - (3-2y)^2 = y^2 - 9y - (9 - 12y + 4y^2) =$
$= y^2 - 9y - 9 + 12y - 4y^2 = -3y^2 + 3y - 9$.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Упростите выражение $A - B$, если $A = (x-2y)(x+2y)$; $B = x^2 - 4xy + 5y^2$.

1) $9y^2 + 4xy$ 2) $2x^2 - 9y^2 + 4xy$ 3) $-5y^2$ 4) $4xy - 9y^2$

Решение. По формуле сокращённого умножения
$A = (x-2y)(x+2y) = x^2 - 4y^2$.

Следовательно, $A - B = x^2 - 4y^2 - (x^2 - 4xy + 5y^2) =$
$= x^2 - 4y^2 - x^2 + 4xy - 5y^2 = 4xy - 9y^2$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Выполните умножение многочленов: $(a+2)(a^2-2a+4)$.

1) a^3+16 2) a^3+8 3) a^3+2a^2+8 4) a^3-8

Решение. По формуле сокращённого умножения $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ заданное выражение $(a+2)(a^2-2a+4)=a^3+2^3=a^3+8$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Разложите многочлен $5x^2-5y^2-ax+ay$ на линейные множители.

1) $(5-a)(x-y)$ 2) $(x^2-y^2)(5-a)$

3) $(x+y)(5x-5y-a)$ 4) $(x-y)(5x+5y-a)$

Решение. $5x^2-5y^2-ax+ay=5(x^2-y^2)-a(x-y)=$
$=5(x-y)(x+y)-a(x-y)=(x-y)(5(x+y)-a)=(x-y)(5x+5y-a)$.
Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\dfrac{a-4}{4+a}$; Б) $\dfrac{4+a}{a-4}$; В) $\dfrac{4-a}{4+a}$

с тождественно равным ему выражением:

1) $-\dfrac{4-a}{4+a}$ 2) $-\dfrac{a-4}{4-a}$ 3) $\dfrac{a+4}{a-4}$ 4) $-\dfrac{a-4}{a+4}$

Решение. Преобразуем каждое из заданных выражений.

А) $\dfrac{a-4}{4+a}=\dfrac{-(4-a)}{4+a}=-\dfrac{4-a}{4+a}$. Это выражение тождественно равно выражению 1).

Б) $\dfrac{4+a}{a-4}=\dfrac{a+4}{a-4}$. Это выражение тождественно равно выражению 3).

В) $\dfrac{4-a}{4+a}=\dfrac{-(a-4)}{4+a}=-\dfrac{a-4}{a+4}$. Это выражение тождественно равно выражению 4).

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

Вариант № 1

1. Какое из приведённых ниже выражений тождественно равно произведению $(4-x)(x-1)$?

1) $(x-4)(1-x)$ 2) $-(x-4)(1-x)$

3) $(4-x)(1-x)$ 4) $(x-4)(x-1)$

2. Упростите выражение $x^2 - 4 - (x+1)(x-4)$.

1) $3x - 8$ 2) $3x$ 3) $2x^2 + 3x$ 4) $2x^2 - 8$

3. Найдите числовое значение многочлена $4a^2 - 12ab + 9b^2$ при $a = 1{,}25$; $b = -2{,}5$.

1) 100 2) $-1{,}25$ 3) 25 4) 4,5

4. Пусть $a = 5x^2 + 3xy - 1$, $b = 2x^2 + 10$, $c = x(y - x)$. Составьте выражение $2a - 3b + c$ и приведите его к стандартному виду.

1) $3x^2 + 7xy - 32$ 2) $13x^2 - 8xy - 30$
3) $6x^2 + 4xy + 9$ 4) $7x^2 + 3xy + 9$

5. Выполните умножение многочленов $3(7a^2b - a^3)(ab^2 - b^3)$ и полученное выражение приведите к стандартному виду.

1) $24a^3b^3 - 24a^4b^2$ 2) $-3a^4b^2 - 21a^2b^4$
3) $24a^3b^3 - 3a^4b^2 - 21a^2b^4$ 4) $3a^9b^9$

6. Разложите многочлен $121 - (t-8)^2$ на линейные множители.

1) $(3-t)(3-t)$ 2) $(11-t)(t-8)$
3) $(57-t)(57-t)$ 4) $(19-t)(3+t)$

7. Замените буквы А, Б и В одночленами так, чтобы выполнялось равенство $(5x^3 - \text{А})^2 = \text{Б} - 30x^3y^2 + \text{В}$.

1) $\text{А} = 30y^2; \text{Б} = 5x^2; \text{В} = 30y^2$

2) $\text{А} = 6y^2; \text{Б} = 25x^3; \text{В} = 36y^4$

3) $\text{А} = -3y; \text{Б} = 25x^5; \text{В} = 9y^2$

4) $\text{А} = 3y^2; \text{Б} = 25x^6; \text{В} = 9y^4$

8. Соотнесите, какой из многочленов
А) $4x^2 + 5y^2$; Б) $4x^2 - y^2$; В) $(x+y)(4x-y)$
в сумме с многочленом $(x-y)^2$ даёт многочлен

1) $5x^2 + 6y^2 - 2xy$ 2) $5x^2 + xy$
3) $5x^2 - 2xy$ 4) $5x^2 + 4y^2$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы равенство $x^2 + x - 6 = (x - 2)(\ \dots\ )$ было верным.

1) $x - 6$ 2) $x + 3$ 3) $x + 6$ 4) $x - 3$

2. Упростите выражение $b - 2 \cdot (5 - 2b) + 3 \cdot (b - 2)$. В ответе запишите его значение при $b = 2$.

Ответ: ______

3. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

$\frac{1}{3} \cdot (9y - 6) - (7y + 4)$.

1) $4y + 6$ 2) $-4y + 6$ 3) $-4y - 6$ 4) $4y - 6$

4. Замените A таким одночленом, чтобы выполнялось равенство $-6a^4b^5 \cdot A = 18a^4b^{10}$.

1) $-3ab^2$ 2) $-3b^2$ 3) $-3ab^5$ 4) $-3b^5$

5. Найдите значение выражения $(x - 2)(x + 5) - (x + 3)(x - 4)$ при $x = -4{,}5$.

Ответ: ______

6. Разложите на множители выражение $xy^3 + y^3 + x + 1$.

1) $(x + 1)(y + 1)(y^2 + y + 1)$ 2) $(x + 1)(y - 1)(y^2 + y + 1)$
3) $(x + 1)(y + 1)(y^2 - y + 1)$ 4) $(x + 1)(y - 1)(y^2 - y + 1)$

7. Найдите значение выражения
$(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)(a^4 + 16) - (a^4 - 1)^2$ при $a = 3$.

Ответ: ______

8. Упростите выражение $(a + 1)^3 - (a - 1)^3$.

1) 2 2) $6a(a + 1)$ 3) $2(3a^2 + 1)$ 4) $6a^2$

Вариант № 3

1. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $-x^2 - x + 20 = (x + 5)(\ \dots\ )$?

1) $x - 4$ 2) $4 - x$ 3) $x + 20$ 4) $20 - x$

2. Найдите числовое значение многочлена $p^2 + 2pq + q^2$ при $p = 1{,}5$; $q = -1{,}5$.

1) 9 2) $-4{,}5$ 3) 0 4) $-1{,}5$

3. Приведите выражение $a(4a-1)-(1-2a)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $3a-1$ 2) $-a-1$ 3) $8a^2-5a-1$ 4) $-3a+1$

4. Упростите выражение $P+Q$, если $P=(p-3q)(p+3q)$; $Q=9q^2-2pq-p^2$.

1) $2p^2-2pq$ 2) $18q^2-2pq$
3) $18q^2+2p^2$ 4) $-2pq$

5. Выполните умножение многочленов: $(5c-3d)(25c^2+15cd+9d^2)$.

1) $125c^3-27d^3$ 2) $125c^3+27d^3$
3) $125c^3+75cd^2-27d^3$ 4) $125c^3+75c^2d-45cd^2+27d^3$

6. Найдите, при каком значении N равенство $(12c^5d^4+18c^4d^3):N=-2cd-3$ верно.

1) $N=6c^5\cdot d^4$ 2) $N=6c^4\cdot d^3$ 3) $N=-6c^4\cdot d^3$ 4) $N=-6c^5d^4$

7. Разложите многочлен z^3+z^2-z-1 на линейные множители.

1) $(z-1)\cdot(z+1)$ 2) $(z-1)^2\cdot(z+1)$
3) $(z^2+1)\cdot(z-1)$ 4) $(z+1)^2\cdot(z-1)$

8. Соотнесите каждое выражение

А) $\frac{x-3}{3-x}$; Б) $\frac{3+x}{x-3}$; В) $\frac{3-x}{x+3}$

с тождественно равным ему выражением:

1) $-\frac{-x-3}{x-3}$ 2) $-\frac{-x-3}{3-x}$ 3) $-\frac{x-3}{3+x}$ 4) $\frac{3-x}{x-3}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений x^2-y^2 и $(x-3)(x+2)$?

1) $(x-y)(x+y)$ 2) x^2-x-6
3) $(3-x)(-x-2)$ 4) $(x-y)^2$

2. Упростите выражение $(x-8)^2-(x^2+64)$.

1) $16x+128$ 2) 0 3) -128 4) $-16x$

3. Найдите числовое значение многочлена $x^3 - 2xy^2 + y^3$ при $x = 2$, $y = 3$.

1) 0 2) −4 3) 3 4) −1

4. Приведите выражение $(a+1)a + (a-1)^2$ к многочлену стандартного вида.

1) $3a - 1$ 2) $-2a + 1$ 3) $2a^2 - a + 1$ 4) $a^2 + a + 1$

5. Упростите выражение $A - B$, если $A = (2x - y)(x + 2y)$, $B = (x + y)^2 - 3y^2 - 5xy$.

1) $6xy - 4y^2$ 2) $x^2 + 2y^2$ 3) $x^2 - 2y^2$ 4) $x^2 + 6xy$

6. Выполните умножение многочленов: $(a - 2b)(2a^2 - 3ab - 2b^2)$.

1) $2a^3 + 7a^2b - 4ab^2 + 4b^3$ 2) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$
3) $2a^3 - 7a^2b + 4ab^2 - 4b^3$ 4) $2a^3 + 7a^2b + 4ab^2 + 4b^3$

7. Найдите, при каком значении x равенство $(24c^7d^5 - 18c^6d^6) : x = (3d - 4c)$ верно.

1) $6c^6d^5$ 2) $-2c^5d^6$ 3) $-6c^6d^5$ 4) $2c^5d^6$

8. Разложите многочлен $y^3 + 2y^2 - 4y - 8$ на линейные множители.

1) $(y+2)^2(y-2)$ 2) $(y-2)^2(y+2)$
3) $(y+2)(y^2+2)$ 4) $(y-4)(y+2)^2$

Вариант № 5

1. Какое из следующих выражений не является тождественно равным ни одному из выражений $(a-b)^2$ и $(a-4)(b+4)$?

1) $a^2 - b^2$ 2) $ab + 4(a - b) - 16$
3) $a^2 - 2ab + b^2$ 4) $(4-a)(-b-4)$

2. Упростите выражение $(x+2)^2 - (4 - x^2)$.

1) 0 2) $2x^2$ 3) $4x$ 4) $2x^2 + 4x$

3. Найдите числовое значение многочлена $xy - 3y + 4x - 12$ при $x = 2$, $y = 1{,}4$.

1) 5,4 2) −4,4 3) −4,6 4) −5,4

4. Представьте выражение $a(a-b)(a+b) + (a-1)(b^2+5)$ в виде алгебраической суммы одночленов.

1) $a^3 - 2b^2 + 5a - 5$ 2) $a^3 - b^2 + 5a - 5$
3) $a^3 - ab^2 + 5a - 5$ 4) $a^3 + 2ab^2 - b^2 + 5a - 5$

5. Упростите выражение $A^2 + B$, где $A = a - b^2$, $B = (2a - b^2)(b^2 + 4)$.

1) $8a - 4b^2$ 2) $a^2 + 8a - 4b^2$
3) $a^2 + 2b^4 + 8a - 4b^2$ 4) $a^2 - 4ab^2 + 8a - 4b^2$

6. Выполните умножение многочленов: $(m - n + 1)(m + n + 1)$.

1) $m^2 - n^2 + 1$ 2) $m^2 + 2m + 1 - n^2$
3) $m^2 - 2n + 2m - n^2 + 1$ 4) $m^2 - n^2 - 1$

7. Найдите такой многочлен p, при котором многочлены $c^2 - a$ и $(c^3 - 2a^3 + 2a^2c^2 - ac) \cdot p^{-1}$ тождественно равны.

1) $2a^2 - c$ 2) $a^2 + 2c$ 3) $2a^2 + a - c$ 4) $2a^2 + c$

8. Разложите многочлен $a^3 - 4a^2 - 4a + 16$ на линейные множители.

1) $(a-2)^2(a+2)$ 2) $(a-2)(a+2)(a+4)$
3) $(a-2)(a+2)(a-4)$ 4) $(a-4)^3$

Вариант № 6

1. Укажите выражение, тождественно равное выражению $(3x - 5)^2$.

1) $9x^2 - 30x + 25$ 2) $9x^2 - 15$ 3) $9x^2 - 15x + 25$ 4) $9x^2 - 25$

2. Какое выражение нужно подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $(x^2 - 4)(\ \dots\ ) = x^3 - x^2 - 4x + 4$?

1) $x^2 + 1$ 2) $x - 4$ 3) $x - 1$ 4) $x^2 + 4$

3. Найдите значение выражения $(m+2)(3-m)-3m(1+m)$ при $m = -1$.

Ответ: ______

4. Укажите выражение, не являющееся одночленом.

1) $3a^3b^2$ 2) $-4{,}7$ 3) $31a^3b^2c^5$ 4) $-a^2 + 7b$

5. Приведите к стандартному виду одночлен $-2a^2b^3 \cdot 0{,}5ab^2$.

1) $-a^3b^5$ 2) $-a^3b^6$ 3) $-10a^3b^5$ 4) $10a^3b^6$

6. Выполните умножение $a^2(a^3 - 2a^4)$. В ответе укажите степень получившегося многочлена.

Ответ: ______

7. Найдите значение выражения $(x-3)^2 - 2(x-3)(x+3) + (x+3)^2$ при $x = -\dfrac{11}{13}$.

Ответ: ______

8. Упростите выражение $(2 + x)^3 + (x - 1)^2 - 10x$.

1) $2x^2 - 8x + 8$ 2) $x^3 - 8x + 3x^2 + 12$
3) $2x^3 + 8x + 3x^2 + 8$ 4) $x^3 + 7x^2 + 9$

§ 9. Алгебраические дроби. Преобразования рациональных выражений*

Основные сведения

Основное свойство дроби: $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Действия с дробями (предполагается, что знаменатели дробей отличны от нуля):

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Демонстрационный вариант

1. Представьте выражение $2x + \frac{1-3x^2}{x}$ в виде дроби.

Решение. $2x + \frac{1-3x^2}{x} = \frac{2x \cdot x + 1 - 3x^2}{x} = \frac{1-x^2}{x}$.

Ответ: $\frac{1-x^2}{x}$.

2. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен квадрату разности чисел m и n, а знаменатель — удвоенной разности этих чисел.

1) $\frac{(m+n)^2}{2m+2n}$ 2) $\frac{(m-n)^2}{2mn}$ 3) $\frac{(m-n)^2}{2(m-n)}$ 4) $\frac{m^2-n^2}{2(m-n)}$

Решение. Выражение «квадрат разности чисел m и n» записывается в виде $(m-n)^2$ — числитель дроби. Запись выражения «удвоенная разность чисел m и n» имеет вид $2(m-n)$ — знаменатель дроби. Следовательно, указанной в условии записи соответствует выражение 3).

Ответ: 3.

---

*Все преобразования в заданиях этого параграфа выполняются на множестве допустимых значений.

3. Найдите, при каком значении x пропорция $\frac{x}{6d} = \frac{5c^2d^4}{cd^2}$ верна ($c \neq 0$, $d \neq 0$).

1) $30cd^3$ 2) $6cd$ 3) $5d^2$ 4) $5cd$

Решение. По условию пропорция верна, значит,

$$x = \frac{5c^2d^4 \cdot 6d}{cd^2} = \frac{30c^2d^5}{cd^2} = 30cd^3.$$

Из предложенных значений верным является 1).

Ответ: 1.

4. Найдите общий знаменатель дробей $\frac{3a}{a^2+4a+4}$; $\frac{2}{a^2-4}$; $\frac{5a^2}{a-2}$.

1) $(a+2)(a-2)$ 2) $(a-2)(a+2)^2$
3) a^2-4 4) $(a+2)^2$

Решение. $\frac{3a}{a^2+4a+4} = \frac{3a}{(a+2)^2}$; $\frac{2}{a^2-4} = \frac{2}{(a-2)(a+2)}$.

Следовательно, общим знаменателем заданных дробей является выражение $(a-2)(a+2)^2$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Выполните вычитание дробей: $\frac{12}{3b+b^2} - \frac{4}{b}$, $b \neq 0$.

1) $\frac{1}{3+b}$ 2) $-\frac{1}{3+b}$ 3) $\frac{4}{3+b}$ 4) $-\frac{4}{3+b}$

Решение. $\frac{12}{3b+b^2} - \frac{4}{b} = \frac{12}{b(3+b)} - \frac{4}{b} = \frac{12-4(3+b)}{b(3+b)} =$

$$= \frac{12-12-4b}{b(3+b)} = -\frac{4}{3+b}.$$

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Выполните деление дробей: $\frac{(a+3)^2}{2a-4} : \frac{3a+9}{a^2-4}$.

1) $\frac{2a^2-6a+3}{a-2}$ 2) $\frac{a^2+5a+6}{6}$
3) $\frac{2a^2+5a+1}{6}$ 4) $\frac{a^2-5a+6}{a+3}$

Решение. $\dfrac{(a+3)^2}{2a-4} : \dfrac{3a+9}{a^2-4} = \dfrac{(a+3)^2}{2a-4} \cdot \dfrac{a^2-4}{3a+9} =$

$$= \frac{(a+3)^2(a-2)(a+2)}{2(a-2)\cdot 3(a+3)} = \frac{(a+3)(a+2)}{6} = \frac{a^2+5a+6}{6}.$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Упростите выражение $\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2} \cdot \left(\dfrac{y^2+xy}{x+y} - x\right)^2$ и найдите его значение при $x = -2$ и $y = 3$.

Решение. $\dfrac{x^2+xy}{x^2-y^2} \cdot \left(\dfrac{y^2+xy}{x+y} - x\right)^2 =$

$$= \frac{x(x+y)}{(x-y)(x+y)} \cdot \left(\frac{y(y+x)}{x+y} - x\right)^2 = \frac{x}{x-y} \cdot (y-x)^2 = x(x-y).$$

Подставляя в полученное выражение значения $x = -2$ и $y = 3$, получим $-2(-2-3) = 10$.

Ответ: 10.

8. Упростите выражение $\dfrac{x^2y - y^2x}{x^3 - y^3} \cdot (x^2 + xy + y^2)$.

Решение. $\dfrac{x^2y - y^2x}{x^3 - y^3} \cdot (x^2+xy+y^2) = \dfrac{xy(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x-y)(x^2+xy+y^2)} = xy.$

Ответ: xy.

Вариант № 1

1. Представьте выражение $x - \dfrac{x^2-5}{x}$ в виде дроби.

Ответ: ______

2. Сократите дробь $\dfrac{x^3-27}{x^2-6x+9}$.

1) $x+3$ 2) $\dfrac{x+9}{x-9}$ 3) $\dfrac{x^2+3x+9}{x-3}$ 4) $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-6x+9}$

3. Упростите выражение $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2) - y^2(y-1) - 7x^3$.

1) x^3+y^2 2) $y^2-y^3-3x^2$ 3) $2xy-3x^2$ 4) $4x^2+y^2$

4. Найдите общий знаменатель дробей $\frac{3x-1}{x^2-1}$; $\frac{3x-1}{x^2+2x+1}$; $\frac{3x-1}{x^2-2x+1}$.

1) $3x-1$ 2) x^2-1 3) x^2-2x+1 4) $(x+1)^2(x-1)^2$

5. Выполните сложение дробей $\frac{5x+2}{x^3-8}+\frac{x-1}{x^2+2x+4}$.

1) $\frac{x+1}{x^2+2x+4}$ 2) $\frac{1}{x-2}$ 3) $\frac{5x+2}{x^2+2x+4}$ 4) $\frac{6x^2+1}{x^3-8}$

6. Выполните деление дробей $\frac{6a-3ab}{b^2+4b+4}:\frac{3a}{b^2-4}$.

1) $\frac{3a}{b+4}$ 2) $-\frac{b^2-4}{(b+2)^2}$ 3) $-\frac{(b-2)^2}{b+2}$ 4) $\frac{b-2}{b+2}$

7. Упростите выражение $\frac{2+\sqrt{3}}{7+2\sqrt{12}}:\frac{1}{2+\sqrt{3}}$.

Ответ: ______

8. Упростите выражение $\frac{(5-x)^2}{2x}\cdot\frac{6x^2}{x^2-10x+25}$.

Ответ: ______

Вариант № 2

1. Представьте выражение $3x-\frac{2+5x^2}{2x}$ в виде дроби.

Ответ: ______

2. Упростите выражение $\frac{a^3-3a^2b}{b}:\left(1+\frac{b}{2b-a}\right)$.

1) $\frac{a^3-2a^2b}{b}$ 2) $\frac{2b-a}{b}$ 3) $\frac{a^2(a-3b)}{2b-a}$ 4) $1+\frac{b}{2b-a}$

3. Сократите дробь $\frac{a^2+a+1}{a^4+a^2+1}$.

1) $\frac{1}{a^2-a+1}$ 2) $\frac{1}{a^2+a+1}$ 3) $\frac{1}{a^2+a}$ 4) $\frac{a^2-a+1}{a^4+a^2+1}$

4. Какое из равенств является верным для любого допустимого значения x?

1) $\dfrac{x^2}{x-1} : \dfrac{x}{(x-1)^2} = \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$ 2) $\dfrac{(4x)^2}{2x+2} \cdot \dfrac{x+1}{2x} = 4x$

3) $\dfrac{x-5}{x^2-10x+25} : (x-5) = 1$ 4) $\dfrac{x+3}{(x-3)^2} \cdot (x-3) = -1$

5. Упростите выражение $\dfrac{a^2+b^2}{ab} - \dfrac{a^3+b^3}{a^2b-b^3} : \dfrac{a^2+ab}{a^2-b^2}$.

Ответ: ______

6. Сократите дробь $\dfrac{8a^2-16a+8}{2a-2}$.

1) $4a+1$ 2) $4(a-1)$ 3) $8(a^2+1)$ 4) $8(a-1)$

7. Упростите выражение $\dfrac{a^2+ab}{b} \cdot \dfrac{a^2-ab}{a^2-b^2} \cdot \dfrac{b}{a}$.

Ответ: ______

8. Сократите дробь $\dfrac{(2a^2-5a-12)\cdot(2a+3)}{4a^2+12a+9}$.

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Представьте выражение $\dfrac{4-5x^2}{x} + 2x$ в виде дроби.

Ответ: ______

2. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен квадрату разности чисел m и n, а знаменатель — разности квадратов этих чисел.

1) $\dfrac{(m+n)^2}{m^2-n^2}$ 2) $\dfrac{(m-n)^2}{m^2+n^2}$ 3) $\dfrac{(m-n)^2}{m^2-n^2}$ 4) $\dfrac{m^2-n^2}{(m-n)^2}$

3. Найдите, при каком значении a пропорция $\dfrac{a}{5} = \dfrac{c^4d}{cd}$ верна ($c \neq 0$, $d \neq 0$).

1) $a = 5c^3d$ 2) $a = 5c^3$ 3) $a = \dfrac{c^3}{5}$ 4) $a = \dfrac{1}{5}c^3d^2$

4. Найдите общий знаменатель дробей

$\dfrac{2a^n}{a^{2n}-2a^n\cdot b^n+b^{2n}}$; $\dfrac{b^n}{a^{2n}-b^{2n}}$; $\dfrac{1}{a^n-b^n}$.

1) $(a^n+b^n)^2(a^n-b^n)$ 2) $(a^{2n}-b^{2n})(a^n+b^n)$

3) $(a^n-b^n)^2(a^n-b^n)$ 4) $(a^n+b^n)(a^n-b^n)^2$

5. Выполните вычитание дробей $\frac{3b}{ab+b} - \frac{5a}{a^2+a}$, $(a \neq 0,\ b \neq 0)$.

1) $-\frac{2}{(a+1)}$ 2) $\frac{3b^2-5a^2}{a^2b+ab}$

3) $\frac{2}{(a+1)}$ 4) $\frac{5a^2-3b^2}{a^2b+ab}$

6. Выполните деление дробей $\frac{25m}{m-n} : \frac{15m^3}{m^2-n^2}$.

1) $\frac{5(m+n)}{3m}$ 2) $\frac{5(m+n)}{3m^2}$ 3) $\frac{5(m-n)}{3m^2}$ 4) $\frac{5}{3}m^2$

7. Сократите дробь $\frac{2a^2+5a}{25-4a^2} \cdot (5-2a)$.

Ответ: ______

8. Выполните умножение $\frac{2x-5}{x+2} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-5x+6{,}25} \cdot (x-2{,}5)$.

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Представьте выражение $\frac{x-x^2+1}{x} + x$ в виде дроби.

Ответ: ______

2. Запишите алгебраическую дробь, числитель которой равен разности квадратов чисел a и b, а знаменатель — квадрату суммы этих чисел.

1) $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$ 2) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}$ 3) $\frac{(b-a)^2}{a^2+b^2}$ 4) $\frac{(a+b)^2}{a^2-b^2}$

3. При каких значениях x пропорция $\frac{2}{x} = \frac{m^6n^3}{m^4n}$ верна $(m \neq 0,\ n \neq 0)$?

1) $\frac{2}{m^2n^2}$ 2) $\frac{mn}{2}$ 3) $\frac{m^3n}{2}$ 4) $\frac{2}{m^3n}$

4. Найдите общий знаменатель дробей

$\frac{a}{a^2-2ab+b^2}$; $\frac{b}{a^2-b^2}$; $\frac{3b+a}{a^2+ab}$.

1) $(a-b)^2(a+b)$ 2) $a(a^2-b^2)$ 3) $(b-a)^2$ 4) $a(a-b)^2(a+b)$

5. Выполните сложение дробей $\dfrac{y+1}{xy-y}+\dfrac{1}{x^2-x}$.

1) $\dfrac{x+y}{x-1}$ 2) $\dfrac{xy+y}{x-1}$ 3) $\dfrac{xy+x+y}{x^2y-xy}$ 4) $\dfrac{xy-x-y}{xy(x-1)}$

6. Выполните умножение дробей $\dfrac{12a}{a+b}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{4a^2}$.

1) $3\left(1+\dfrac{b}{a}\right)$ 2) $\dfrac{3a}{a-b}$ 3) $\dfrac{3b}{b-a}$ 4) $3\left(1-\dfrac{b}{a}\right)$

7. Упростите выражение $\left(\dfrac{4}{b}-\dfrac{8}{b^2+2b}\right):\dfrac{1}{b+2}$.

Ответ: ______

8. Сократите дробь $\dfrac{(3a^2-7a)\cdot(3a+7)}{49-9a^2}$.

Ответ: ______

Вариант № 5

1. Представьте выражение $\dfrac{3x^2-3x+1}{3x}-x$ в виде дроби.

Ответ: ______

2. Запишите дробь, числитель которой равен сумме кубов чисел a и b, а знаменатель — разности квадратов этих чисел. Сократите дробь, если это возможно ($a \neq -b$).

1) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ 2) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a+b}$ 3) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ 4) $\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}$

3. Найдите x, если известно, что отношение $x+4a$ к a^2-b^2 равно отношению a^2+4 к $a+b$.

1) a^3-a^2b-4b 2) $a^3-a^2b-8a-4b$
3) a^3+a^2b-4b 4) a^3+a^2b+4b

4. Найдите общий знаменатель дробей $\dfrac{a-4}{a^2+ab+b^2}$, $\dfrac{b^2+1}{a-b}$, $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+2ab+b^2}$.

1) $(a^3+b^3)(a^2-b^2)$ 2) $(a^3-b^3)(a^2-b^2)$
3) $(a^3-b^3)(a+b)^2$ 4) $(a^3+b^3)(a+b)^2$

5. Выполните действия $\dfrac{a^2-5a}{a^2-4}-\dfrac{2a^2-a}{a(a-2)}+\dfrac{2a+2}{a(a+2)}$.

1) $\dfrac{a^2}{2(a^2-4)\cdot a}$ 2) $\dfrac{-a^3-6a^2-4}{a(a^2-4)}$ 3) $\dfrac{2a^3}{2a(a^2-4)}$ 4) $\dfrac{a+1}{a^2-4}$

6. Упростите выражение $\dfrac{m^3-m}{m^2+m-2}:\dfrac{m+1}{m^2-4}$.

1) $\dfrac{m(m-1)}{(m+1)^2}$ 2) $\dfrac{m(m-1)(m+2)}{(m+1)^2}$

3) $m(m-1)(m-2)$ 4) $m(m-2)$

7. Найдите p, при котором верно равенство $\dfrac{a^2+3a-4}{a^2-16}\cdot p=\dfrac{a-4}{a-1}$.

1) $p=1$ 2) $p=\dfrac{a-4}{a-1}$ 3) $p=\dfrac{(a-4)^2}{(a-1)^2}$ 4) $p=\dfrac{4-a}{a-1}$

8. Соотнесите каждую дробь с тождественно равной ей на её области определения.

$А=\dfrac{a^2+2a-15}{a^2-9}$; Б $=\dfrac{5-a}{a-3}$; В $=\dfrac{a+3}{a^2+3a+9}$

1) $\dfrac{1}{a+3}$ 2) $\dfrac{a+5}{a+3}$ 3) $-\dfrac{a^2-2a-15}{a^2-9}$ 4) $\dfrac{a^2-9}{a^3-27}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Найдите, при каком значении Q верно равенство
$\dfrac{a^2-9}{14a^3}\cdot Q=\dfrac{a-3}{2a}$.

1) $\dfrac{7a^2}{3+a}$ 2) $\dfrac{a+3}{7a}$ 3) $7a^2$ 4) $a+3$

2. Найдите, при каком значении Q верно равенство
$\dfrac{p^2-25}{p^2+10p+25}\cdot Q=p-5,\ p\neq-5$.

1) $Q=25$ 2) $Q=p-5$ 3) $Q=p+5$ 4) $Q=\dfrac{p-5}{p+5}$.

3. Найдите значение p, при котором верно равенство

$$\frac{3x-5}{6x^2-7x-5}\cdot p = x.$$

1) $p=\dfrac{3x-5}{x}$ 2) $p=6x^2-7x-5$ 3) $p=2x^2+x$ 4) $p=\dfrac{2x+1}{3x-5}$

4. Сократите дробь $\dfrac{(4a+b)^2-(4a-b)^2}{16ab}$, $a\neq 0$, $b\neq 0$.

1) 1 2) $\dfrac{b}{8a}$ 3) $-\dfrac{b}{8a}$ 4) $\dfrac{1}{16}$

5. Найдите значение выражения $\dfrac{a^3c-ac^3}{a^2-ac}$ при $a=0{,}2$ и $c=-0{,}1$.

Ответ: ______

6. Вычислите $\dfrac{2{,}5^2-2{,}3^2}{5{,}7^2-2\cdot 5{,}7\cdot 5{,}9+5{,}9^2}$.

Ответ: ______

7. Сократите дробь $\dfrac{(2xy+3x-2x^2-3y)\cdot(x+y)}{x^2-y^2}$.

Ответ: ______

8. Упростите выражение

$$\frac{1}{3b-1}-\frac{27b^3-3b}{9b^2+1}\cdot\left(\frac{3b}{9b^2-6b+1}-\frac{1}{9b^2-1}\right),\ b\neq\pm\frac{1}{3}.$$

Ответ: ______

§ 10. Квадратные корни

Основные сведения

Арифметическим квадратным корнем из числа a называется неотрицательное число, квадрат которого равен a.

При любом $a \geqslant 0$ выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл. Если $a < 0$, то выражение $\sqrt{a}$ не имеет смысла.

Из определения арифметического корня следует, что если выражение $\sqrt{a}$ имеет смысл, то $\sqrt{a} \geqslant 0$ и $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

Свойства арифметического квадратного корня.

1) Квадратный корень из произведения неотрицательных множителей равен произведению квадратных корней из этих множителей, то есть если $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0$, то $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$.

2) Квадратный корень из дроби с неотрицательным числителем и положительным знаменателем равен частному от деления квадратного корня из числителя на квадратный корень из знаменателя, то есть если $a \geqslant 0$, $b > 0$, то $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3) При любом значении a и натуральном k верно равенство $\sqrt{a^{2k}} = |a^k|$.

4) Если $a > b \geqslant 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Демонстрационный вариант

1. Из чисел $3\sqrt{2}$; $\sqrt{15}$; 4; $5\sqrt{3}$ выберите наибольшее.

1) 4 2) $\sqrt{15}$ 3) $5\sqrt{3}$ 4) $3\sqrt{2}$

Решение. $3\sqrt{2} = \sqrt{3^2 \cdot 2} = \sqrt{18}$; $4 = \sqrt{16}$; $5\sqrt{3} = \sqrt{5^2 \cdot 3} = \sqrt{75}$. Следовательно, наибольшим из перечисленных чисел является $5\sqrt{3}$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

2. Какое из данных выражений равно выражению $\frac{\sqrt{12}}{5}$?

1) $\sqrt{\frac{12}{5}}$ 2) $4\sqrt{\frac{3}{5}}$ 3) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 4) $\frac{\sqrt{12} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}}$

Решение. Используя свойства арифметических корней, преобразуем каждое из предложенных выражений.

Выражение 1: $\sqrt{\frac{12}{5}} = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{60}}{5}$; $\frac{\sqrt{60}}{5} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 2: $4\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}}{(\sqrt{5})^2} = \frac{4\sqrt{15}}{5}$; $\frac{4\sqrt{15}}{5} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 3: $\frac{2\sqrt{3}}{5} = \frac{\sqrt{12}}{5}$; $\frac{\sqrt{12}}{5} = \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Выражение 4: $\frac{\sqrt{12}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{12} \neq \frac{\sqrt{12}}{5}$.

Ответ: 3.

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09}$.

1) 0,3 2) 0,5 3) −0,3 4) −0,5

Решение. $\sqrt{1\frac{24}{25}} - 3\sqrt{0{,}09} = \sqrt{\frac{49}{25}} - 3\cdot 0{,}3 = \frac{7}{5} - 0{,}9 = 1{,}4 - 0{,}9 = 0{,}5.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

4. Упростите выражение $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6})$.

1) $3\sqrt{3} - 12$ 2) $3\sqrt{3} + 6$ 3) $\sqrt{3} - 4$ 4) 12

Решение. $(8\sqrt{18} + 6\sqrt{24} - \sqrt{72}) : (2\sqrt{6}) = \frac{8\sqrt{18}}{2\sqrt{6}} + \frac{6\sqrt{24}}{2\sqrt{6}} - \frac{\sqrt{72}}{2\sqrt{6}} =$

$= 4\sqrt{\frac{18}{6}} + 3\sqrt{\frac{24}{6}} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{72}{6}} = 4\sqrt{3} + 6 - \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 6.$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

5. Сократите дробь $\frac{49 - y}{7 - \sqrt{y}}$, если $\sqrt{y} \neq 7$.

1) $7 + \sqrt{y}$ 2) $\frac{1}{7 + \sqrt{y}}$ 3) $7 + y$ 4) $\sqrt{7} - \sqrt{y}$

Решение. $\frac{49 - y}{7 - \sqrt{y}} = \frac{(7 - \sqrt{y})(7 + \sqrt{y})}{7 - \sqrt{y}} = 7 + \sqrt{y}.$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Упростите, исключив иррациональность из знаменателя дроби $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

Решение. $\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(4+\sqrt{15})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} = \dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})} =$

$$\frac{(5-2\sqrt{15}+3)(4+\sqrt{15})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{2(4-\sqrt{15})(4+\sqrt{15})}{2} = 16-15 = 1.$$

Ответ: 1.

7. Найдите значение выражения $x^2 - 3\sqrt{2}x + 2$, если $x = \sqrt{2}+1$.

1) $-\sqrt{2}-1$ 2) $\sqrt{2}+1$ 3) $\sqrt{2}-1$ 4) $1-\sqrt{2}$

Решение. Подставляя в заданное выражение значение x, получим $(\sqrt{2}+1)^2 - 3\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)+2 = 2+2\sqrt{2}+1-3\cdot 2-3\sqrt{2}+2 = -1-\sqrt{2}$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\dfrac{\sqrt{3x-19}}{x-7}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} 3x-19 \geqslant 0, \\ x-7 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 6\frac{1}{3}, \\ x \neq 7. \end{cases}$

Следовательно, наименьшим целым числом, входящим в область допустимых значений, является 8.

Ответ: 8.

Вариант № 1

1. Расположите в порядке возрастания числа $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$.

1) $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ 2) $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$
3) $\sqrt{5}$; $2\sqrt{3}$; $\sqrt{6}$; $3\sqrt{2}$ 4) $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$

7. Зак. № 199

2. Какое из данных выражений равно выражению $\frac{4}{\sqrt{18}}$?

1) $\sqrt{\frac{2}{9}}$ 2) $2\sqrt{\frac{2}{9}}$ 3) $\frac{4}{3\sqrt{2}}$ 4) $\frac{3}{2\sqrt{9}}$

3. Вычислите $\sqrt{3\frac{2}{9}} \cdot \sqrt{2\frac{23}{29}}$.

1) $2\sqrt{\frac{23}{29}}$ 2) $3\sqrt{2\frac{11}{29}}$ 3) 3 4) 4

4. Упростите выражение $\left(\sqrt{27} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{12}\right) \cdot \sqrt{12}$.

1) 12 2) 26 3) 36 4) 21

5. Сократите дробь $\frac{x + \sqrt{8x} + 2}{x + \sqrt{2x} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}}$.

1) $\sqrt{x} + 2$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x - 2}}$ 3) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} - 2}$ 4) $\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$

6. Вычислите $-\sqrt{0{,}2} \cdot (\sqrt{98} \cdot \sqrt{10} + \sqrt{1{,}8})$.

1) $\sqrt{0{,}2}$ 2) $\sqrt{2}$ 3) $-14{,}6$ 4) $-13{,}4$

7. Найдите значение выражения $\frac{1}{2a} + \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$, если $a = 5$, $b = 4$.

1) 0,65 2) 1,35 3) 1,75 4) 0,55

8. Сколько целых чисел принадлежит промежутку $(\sqrt{17}; \sqrt{121}]$?

Ответ: ______

Вариант № 2

1. Укажите наибольшее из перечисленных чисел: $2\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$; 4,5.

1) $2\sqrt{7}$ 2) $\sqrt{13}$ 3) 4,5 4) нет такого числа

2. Какое из данных выражений **не** равно выражению $\frac{\sqrt{45}}{2}$?

1) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ 2) $\sqrt{\frac{45}{4}}$ 3) $\frac{15}{2\sqrt{5}}$ 4) $\sqrt{\frac{45}{2}}$

3. Вычислите $\frac{\sqrt[3]{32}\cdot\sqrt[6]{36}}{\sqrt[9]{27}}$.

1) 12 2) $\frac{4}{3}$ 3) $\frac{128}{3}$ 4) 4

4. Вычислите $\left(8\sqrt{12}+4\sqrt{75}\right):\left(3\sqrt{3}\right)$.

1) 116 2) 4 3) 36 4) 12

5. Вычислите $\left(3-\sqrt{5}\right)\cdot\sqrt{14+6\sqrt{5}}$.

Ответ: ______

6. Упростите выражение $\frac{\sqrt{28}\cdot 3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{7}}$.

1) 6 2) $\sqrt{7}$ 3) $2\sqrt{2}$ 4) $3\sqrt{2}$

7. Одна из точек на координатной прямой (см. рис. 16) соответствует числу $\sqrt{173}$. Какая это точка?

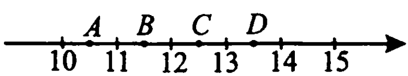


Рис. 16.

1) A 2) B 3) C 4) D

8. Упростите выражение $\frac{1}{x+1}\sqrt{x^2+6x+9}$ при $x>-3$.

1) 1 2) 0 3) $\frac{2x+3}{x+1}$ 4) $1+\frac{2}{x+1}$

8 Зак. № 199

Вариант № 3

1. Из чисел $2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $\sqrt{11}$; $\sqrt{17}$ выберите наибольшее.

1) $2\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{2}$ 3) $\sqrt{11}$ 4) $\sqrt{17}$

2. Какое из данных выражений **не** равно выражению $\frac{2}{\sqrt{28}}$?

1) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ 2) $\frac{\sqrt{7}}{7}$ 3) $\sqrt{\frac{1}{14}}$ 4) $\frac{\sqrt{28}}{14}$

3. Вычислите $\sqrt{10\frac{1}{36} \cdot 5\frac{4}{9}}$.

1) $\frac{5\sqrt{2}}{18}$ 2) $\frac{10}{18}$ 3) $\frac{133}{18}$ 4) $\frac{\sqrt{200}}{18}$

4. Упростите выражение $(4\sqrt{45} + 2\sqrt{80} - \sqrt{20}) : 2\sqrt{5}$.

1) 9 2) $2 + 2\sqrt{3}$ 3) 10 4) $6 - \sqrt{5}$

5. Сократите дробь $\frac{x - 7}{\sqrt{x} + \sqrt{7}}$.

1) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{7}}$ 2) $\sqrt{x} + \sqrt{7}$

3) $\frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{7}}$ 4) $\sqrt{x} - \sqrt{7}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя,
$\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{21} + 5)}{\sqrt{7} + \sqrt{3}}$.

Ответ: ______

7. Найдите значение выражения $2a^2 - 3ab + 2b^2$, если $a = \sqrt{3} + \sqrt{2}$; $b = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

1) 19 2) 17 3) $17 + 8\sqrt{6}$ 4) $23 + 8\sqrt{6}$

8. Упростите выражение $(x - 7) \cdot \sqrt{\frac{1}{x^2 - 14x + 49}}$ при $x < 7$.

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Из чисел $3\sqrt{3}$; $2\sqrt{7}$; $\sqrt{26}$; $\sqrt{22}$ выберите наибольшее.

   1) $3\sqrt{3}$ 2) $2\sqrt{7}$ 3) $\sqrt{26}$ 4) $\sqrt{22}$

2. Какое из данных выражений равно выражению $\frac{3\sqrt{2}}{7}$?

   1) $\sqrt{\frac{6}{49}}$ 2) $\frac{\sqrt{18}}{7}$ 3) $4\sqrt{\frac{2}{7}}$ 4) $\frac{\sqrt{6}}{7}$

3. Вычислите $\sqrt{1\frac{7}{9}\cdot 4{,}5}$.

   1) $2\sqrt{2}$ 2) 2 3) 3 4) $\sqrt{2}$

4. Упростите выражение $(\sqrt{27}-2\sqrt{3}-\sqrt{2})\cdot(\sqrt{2}+\sqrt{3})$.

   1) 1 2) -1 3) 3 4) -3

5. Сократите дробь $\frac{a-9}{\sqrt{a}+3}$.

   1) $\sqrt{a}-3$ 2) $\frac{1}{\sqrt{a}+3}$ 3) $\frac{1}{\sqrt{a}-3}$ 4) $3+\sqrt{a}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя, $\frac{(2\sqrt{3}-3)\cdot(7+4\sqrt{3})}{\sqrt{12}+3}$.

   Ответ: ______

7. Найдите значение выражения $2u^2+5uv-3v^2$, если $u=\sqrt{6}$, $v=\sqrt{24}$.

   1) 12 2) $\sqrt{24}-2$ 3) 0 4) $18-\sqrt{24}$

8. Упростите выражение $(x-2)^2\sqrt{\frac{1}{4-4x+x^2}}$ при $x>2$.

   Ответ: ______

Вариант № 5

1. Расположите числа $5\sqrt{2}$; 7; $3\sqrt{8}$; $4\sqrt{3}$ в порядке возрастания.

   1) 7; $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$ 2) $4\sqrt{3}$; 7; $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{8}$
   3) $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$; $3\sqrt{8}$ 4) $3\sqrt{8}$; $5\sqrt{2}$; 7; $4\sqrt{3}$

2. Какое из данных выражений равно выражению $\frac{\sqrt{8}}{4\sqrt{3}}$?

1) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ 2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 3) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 4) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

3. Вычислите $\sqrt{\frac{289}{8}} : \sqrt{\frac{25}{32}}$.

1) $\frac{17}{5}\sqrt{2}$ 2) $\frac{17 \cdot 5}{16}$ 3) 6,8 4) $\frac{17}{10}\sqrt{2}$

4. Упростите выражение $\sqrt{14+6\sqrt{5}} \cdot (\sqrt{5}-3)$.

1) -4 2) 4 3) $(\sqrt{5}-3)^2$ 4) -2

5. Сократите дробь $\frac{x^4-4}{(x^2+2)\left(x^2-(\sqrt{2}-1)x-\sqrt{2}\right)}$, $x \neq \sqrt{2}$.

1) $\frac{x-\sqrt{2}}{x-1}$ 2) $\frac{x+\sqrt{2}}{x+1}$ 3) $\frac{x-\sqrt{2}}{x+1}$ 4) $\frac{x+\sqrt{2}}{x-1}$

6. Вычислите, исключив иррациональность из знаменателя, $\frac{(2+\sqrt{3})(3\sqrt{3}-5)}{\sqrt{3}-1}$.

Ответ: ______

7. Найдите значение выражения $a\sqrt{5}+b\sqrt{2}-\frac{4}{ab}+\sqrt{10}$ при $a=\sqrt{5}-1$, $b=\sqrt{2}+1$.

1) 8 2) $8+\sqrt{10}$
3) $8-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}$ 4) $6-2\sqrt{5}+2\sqrt{2}+2\sqrt{10}$

8. Упростите выражение $-\frac{(4x^2-1)}{2x+1} \cdot \sqrt{\frac{4x^2+4x+1}{4x^2-4x+1}}$ при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

Ответ: ______

Вариант № 6

1. Вычислите $\sqrt{5} \cdot \sqrt{\frac{320}{25}}$.

1) 4 2) $8\sqrt{2}$ 3) $12\sqrt{5}$ 4) 8

2. Вынесите множитель из-под знака корня $\sqrt{63}$.

1) $7\sqrt{3}$ 2) $3\sqrt{7}$ 3) $3\sqrt{60}$ 4) $7\sqrt{56}$

3. Выполните действия $5 - 3\sqrt{7} + \sqrt{63}$.

1) 11 2) 5 3) -5 4) $11\sqrt{7}$

4. Вычислите $\sqrt{(\sqrt{2} - 3)^2} + \sqrt{2} + 5$.

Ответ: ______

5. Упростите выражение $\dfrac{15\sqrt{8}}{\sqrt{18}}$.

1) $\dfrac{15}{\sqrt{3}}$ 2) $7{,}5\sqrt{2}$ 3) $\dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ 4) 10

6. Расположите в порядке убывания числа $2\sqrt{10}$; $6{,}5$; $\sqrt{41}$.

1) $2\sqrt{10}$; $\sqrt{41}$; $6{,}5$ 2) $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$; $6{,}5$
3) $2\sqrt{10}$; $6{,}5$; $\sqrt{41}$ 4) $6{,}5$; $\sqrt{41}$; $2\sqrt{10}$

7. Вынесите множитель из-под знака корня и упростите выражение $2\sqrt{18} + 5\sqrt{50} - \frac{1}{4}\sqrt{32} - 7\sqrt{2}$.

1) $18\sqrt{2}$ 2) $39\sqrt{2}$ 3) $23\sqrt{2}$ 4) $2\sqrt{2}$

8. Найдите наименьшее целое число, входящее в область допустимых значений выражения $\sqrt{80 + 9x}$.

Ответ: ______

§ 11. Линейные и квадратные уравнения

Основные сведения

Линейное уравнение. Уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, x — переменная, называется линейным. Решением линейного уравнения такого вида является:

1) при $a \neq 0$, $b \in R$ $x = -\dfrac{b}{a}$;
2) при $a = 0$, $b = 0$ $x \in R$;
3) при $a = 0$, $b \neq 0$ $x \in \varnothing$.

Квадратное уравнение.

Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ называется квадратным уравнением.

Дискриминант $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то квадратное уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

Если $D > 0$ и b — чётное, то корни квадратного уравнения могут быть вычислены по формуле

$$x_1 = \frac{-b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}, \; x_2 = \frac{-b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - ac}}{a}.$$

Если $D = 0$, то квадратное уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2a}$. Если $D < 0$, то действительных корней нет.

Уравнение вида $x^2 + px + q = 0$ называется **приведённым квадратным уравнением**. Дискриминант $D = p^2 - 4q$. При $D > 0$ корни этого уравнения можно найти по формулам $x_1 = -\dfrac{p}{2} - \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$, $x_2 = -\dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}$. При $D = 0$ $x = -\dfrac{p}{2}$.

Неполные квадратные уравнения.

1) $ax^2 + bx = 0, b \neq 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = -\dfrac{b}{a}$.

2) $ax^2 + c = 0$, $ac < 0$; $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$.

3) $ax^2 = 0$; $x = 0$.

Связь между коэффициентами и корнями квадратного уравнения.

Если $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{c}{a}$.

Если $a + c = b$ (или, что то же самое, $a - b + c = 0$), то $x_1 = -1$, $x_2 = -\frac{c}{a}$.

Формулы Виета.

Если x_1, x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \; x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Для уравнения вида $x^2 + px + q = 0$

$$x_1 + x_2 = -p, \; x_1 x_2 = q.$$

Разложение квадратного трёхчлена на множители.

Если $D > 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, ($x_1, x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.)

Если $D = 0$, то $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$, ($x_1$ — корень уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.)

Демонстрационный вариант

1. Найдите корни уравнения $5x^2 - 16x + 3 = 0$.

1) $\frac{1}{5}; 3$ 2) $-\frac{1}{5}; -3$ 3) $-\frac{1}{5}; 3$ 4) $\frac{1}{5}; -3$

Решение. Так как коэффициент при x — чётный, то корни уравнения:

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{8^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 - 7}{5} = \frac{1}{5};$$

$$x_2 = \frac{-(-8) + \sqrt{8^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{8 + 7}{5} = 3.$$

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. Составьте приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -7$; $x_2 = -1$.

1) $x^2 + 8x + 7 = 0$ 2) $x^2 - 8x + 7 = 0$
3) $x^2 - 8x - 7 = 0$ 4) $x^2 + 8x - 7 = 0$

Решение. Так как приведённое квадратное уравнение имеет вид $x^2 + px + q = 0$ и x_1 и x_2 его корни, то по формулам Виета $p = -(x_1 + x_2) = -(-7 + (-1)) = 8$; $q = x_1 \cdot x_2 = -7 \cdot (-1) = 7$. Значит, $x^2 + 8x + 7 = 0$ — искомое уравнение.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Решите уравнение $-x^2 + 2 = x + 2$.

Решение. $-x^2+2 = x+2$; $x^2+x = 0$; $x(x+1) = 0$. Корни уравнения $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

Ответ: -1; 0.

4. Решите уравнение $\dfrac{5-x}{2} + 1 = \dfrac{3x-1}{4}$.

Решение. $\dfrac{5-x}{2} + 1 = \dfrac{3x-1}{4}$.

Умножив обе части уравнения на 4, получим $10 - 2x + 4 = 3x - 1 \Leftrightarrow 5x = 15 \Leftrightarrow x = 3$.

Ответ: 3.

5. Разложите квадратный трёхчлен $5x^2 + 2x - 3$ на множители.

1) $(x+1)\left(x + \frac{3}{5}\right)$ 2) $(x-1)\left(x - \frac{3}{5}\right)$
3) $(x+1)(5x-3)$ 4) $5(x-1)(x-3)$

Решение. Решая уравнение $5x^2 + 2x - 3 = 0$, находим $x_1 = -1$, $x_2 = \dfrac{3}{5}$. По формуле разложения квадратного трёхчлена (см. «Основные сведения» к параграфу) получаем $5x^2 + 2x - 3 = 5(x+1)\left(x - \dfrac{3}{5}\right) = (x+1)(5x-3)$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

6. Упростите выражение $\dfrac{x^2-3}{x^2-4x+3} - \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$.

1) $\dfrac{1}{x-3}$ 2) $\dfrac{1}{(x-1)(2x-3)}$

3) $\dfrac{x}{x-3}$ 4) другой ответ

Решение. Учитывая, что $x \neq 1$, получаем $\dfrac{x^2-3}{x^2-4x+3} - \dfrac{1}{x-1} =$

$$= \frac{x^2-3}{(x-1)(x-3)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-3-(x-3)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x^2-x}{(x-1)(x-3)} =$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x-1)(x-3)} = \frac{x}{x-3}.$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. При каких значениях x сумма дробей $\dfrac{2x-2}{x+3}$ и $\dfrac{x+3}{x-3}$ равна 5?

1) $-6;\ 5$ 2) $-5;\ 6$ 3) $-3;\ 1$ 4) $-6;\ -5$

Решение. Задача сводится к решению уравнения

$\dfrac{2x-2}{x+3} + \dfrac{x+3}{x-3} = 5$ при условии $x \neq \pm 3$.

Умножим обе части уравнения на $(x+3)(x-3)$. Учитывая, что $x \neq -3$ и $x \neq 3$, получим $(2x-2)(x-3)+(x+3)^2 = 5(x^2-9) \Leftrightarrow x^2+x-30 = 0$. Корни уравнения $x_1 = -6,\ x_2 = 5$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

8. Соотнесите каждое квадратное уравнение

А) $x^2-9=0$; Б) $2x-x^2=0$; В) $x^2-3x-4=0$

и его корни:

1) $0;\ 2$ 2) $-3;\ 3$ 3) $-1;\ 4$ 4) $-4;\ 1$

Решение. Из уравнения А получаем $x^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=3. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 2).

Из уравнения Б следует $x(2-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=2. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 1).

Из уравнения В следует $(x+1)(x-4)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

Решение соответствует ответу 3).

Ответ:

А	Б	В
2	1	3

Вариант № 1

1. Найдите корни уравнения $3x^2 + 5x - 2 = 0$.

1) $2; -\frac{1}{3}$ 2) $-2; \frac{1}{3}$ 3) $\frac{4}{3}; 1$ 4) $-\frac{4}{3}; -1$

2. Найдите дискриминант уравнения $15x^2 - 8x + 1 = 0$.

1) 124 2) 4 3) 76 4) 49

3. Решите уравнение $x^2 - 2x - 3 = 0$.

Ответ: ______

4. При каком значении c значения двучленов $23c^2 + 6c$ и $13c^2 + 16c$ равны?

Ответ: ______

5. Какое выражение надо подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $x^2 + 19x - 42 = (x-2)(\ \dots \ )$?

1) $x - 21$ 2) $x + 21$ 3) $x + 17$ 4) $x - 17$

6. Найдите сумму корней уравнения $0{,}7x + 14x^2 = 0$.

Ответ: ______

7. При каком значении параметра b уравнение $(b+5)x^2 + (2b+10)x + 4 = 0$ имеет только один корень?

Ответ: ______

8. Не решая уравнение, определите, сколько оно имеет корней. Соотнесите уравнения с ответами.

А) $2x^2 + 3x + 5 = 0$ Б) $x^2 - 7x + 8 = 0$ В) $4x^2 + 4x + 1 = 0$

1) нет действит. корней 2) два корня 3) один корень

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите корни уравнения $0{,}7(2x-5) = 2{,}2 - 2(0{,}3x + 7{,}25)$.

1) 6,4 2) −11 3) −4,4 4) нет корней

2. Найдите дискриминант уравнения $3x^2 + 11x + 6 = 0$.

1) −51 2) 7 3) 49 4) 193

3. Решите уравнение $(2x-1) \cdot (2x+1) - (2x+3)^2 = 38$.

Ответ: ______

4. Решите уравнение $\frac{2}{x-5} = \frac{3}{3-2x}$.

Ответ: ______

5. Разложите квадратный трёхчлен $1 - 2x - 3x^2$ на множители.

1) $(x+1)(1-3x)$ 2) $(x-1)(3x+1)$
3) $3(x+1)(1-x)$ 4) $3(x-1)(x+1)$

6. Найдите сумму корней уравнения $18x^2 - 2 = 0$.

Ответ: ______

7. Найдите значение параметра a, при котором один корень уравнения $2x^2 - 6x + 1 - a = 0$ на 10 больше другого.

Ответ: ______

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 + 3x - 4 = 0$ Б) $x^2 - 5x = 0$ В) $x^2 - 10x + 25 = 0$

1) $x_1 = 0, x_2 = 5$ 2) $x_1 = -4, x_2 = 1$ 3) $x_{1,2} = 5$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Найдите корни уравнения $-5x(x-2) + 5(x+1)^2 = -1$.

1) 0,3 2) −0,3 3) −0,6 4) корней нет

2. Укажите приведённое квадратное уравнение, корни которого $x_1 = -6,\ x_2 = 4$.

1) $x^2 - 10x + 24 = 0$ 2) $x^2 - 2x - 24 = 0$
3) $x^2 + 2x - 24 = 0$ 4) $x^2 - 2x + 24 = 0$

3. Решите уравнение $(4x+1)\cdot(2x-4) - 8x^2 = 3\cdot(6-x)$.

Ответ: ______

4. Решите уравнение $\frac{3x-1}{6} - \frac{x}{3} = \frac{5+x}{9}$.

Ответ: ______

5. Разложите квадратный трёхчлен $2x^2 - 5x - 12$ на множители.

1) $(2x-3)(x+4)$ 2) $2(x+3)(x-4)$
3) $(2x-3)(x-4)$ 4) $(2x+3)(x-4)$

6. Упростите выражение $\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x^2-7x+12}$, $x \neq 4$.

1) $\frac{1}{x-4}$ 2) $\frac{1}{x-3}$

3) $\frac{x-7}{x^2-7x+12}$ 4) другой ответ

7. При каких значениях b сумма дробей $\frac{2b^2+1}{3}$ и $\frac{b+4}{6}$ равна 4?

1) 2,25; 2 2) −2,25; −2 3) 2; −2,25 4) −2; 2,25

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 1 = 0$; Б) $x^2 - x = 0$; В) $x^2 - x - 2 = 0$

1) $0; 1$ 2) $-1; 1$ 3) $-1; 2$ 4) $-2; 1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Найдите корни уравнения $3(x-1) - 2(3x+4) = 1$.

1) −4 2) −3 3) 3 4) 4

2. Найдите дискриминант уравнения $3x^2 + 9x + 1 = 0$.

1) 69 2) 64 3) 81 4) 75

3. Найдите сумму корней уравнения $4x^2 - 12x + 5 = 0$.

Ответ: ______

4. Составьте квадратное уравнение, корни которого $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 3$.

1) $2x^2 + 7x - 3 = 0$ 2) $x^2 - 7x + 4 = 0$
3) $4x^2 + 6x + 3 = 0$ 4) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

5. Разложите квадратный трёхчлен $3x^2 + 13x + 4$ на множители.

1) $(3x+1)(x+4)$ 2) $(3x-1)(x+4)$
3) $3(x+1)(x+4)$ 4) $3(x-1)(x-4)$

6. Упростите выражение $\frac{5}{2x^2 - x - 3} + \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$.

1) $\frac{4}{2x+3}$ 2) $\frac{2x^2+4x+3}{(x+1)(2x-3)}$

3) $\frac{2x^2+4x-3}{2x^2-x-3}$ 4) $\frac{2}{2x-3}$

7. При каких значениях a сумма дробей $\frac{5a^2-4}{4}$ и $\frac{a+3}{5}$ равна 5?

1) 1; 2 2) 2; 3 3) $-\frac{54}{25}$; 2 4) $-\frac{11}{5}$; 3

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 9 = 0$; Б) $x^2 + 2x = 0$; В) $x^2 + 4 = 0$

1) 0; −2 2) −2; 2 3) −3; 3 4) нет корней

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Найдите корни уравнения $(2x+3)^2 - (4x+1)(x+3) = 5$.

1) $\frac{4}{9}$ 2) 1 3) −1 4) корней нет

2. Составьте приведённое квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = \frac{2}{3}$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

1) $x^2 - x + 1 = 0$ 2) $x^2 + \frac{13}{6}x - 1 = 0$

3) $x^2 - \frac{13}{6}x - 1 = 0$ 4) $x^2 - \frac{13}{6}x + 1 = 0$

3. Найдите сумму корней уравнения $8x^2 + 2x - 3 = 0$.

Ответ: ______

4. Решите уравнение $4x^2 - 13x - 12 = 0$.

1) 0,75; 4 2) −0,75; 4 3) 0,75; −4 4) −0,75; −4

5. Представьте квадратный трёхчлен $10x^2 + 9x - 9$ в виде произведения линейных множителей.

1) $(5x + 3)(2x - 3)$ 2) $(5x + 3)(2x + 3)$
3) $(5x - 3)(2x - 3)$ 4) $(5x - 3)(2x + 3)$

6. Упростите выражение $\dfrac{9}{2x^2 + 11x + 5} + \dfrac{1}{x + 5}$, $x \neq -5$.

1) $\dfrac{2}{2x+1}$ 2) $\dfrac{2}{x+5}$ 3) $\dfrac{11x+6}{2x^2+11x+5}$ 4) другой ответ

7. Найдите все значения x, при которых значение выражения $\dfrac{3x^2 - x}{3} + \dfrac{x - 2}{2}$ равно 1.

1) $\dfrac{3}{2}; \dfrac{4}{3}$ 2) $-\dfrac{3}{2}; \dfrac{4}{3}$ 3) $\dfrac{3}{2}; -\dfrac{4}{3}$ 4) $-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{4}{3}$

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $4x^2 + 4x - 15 = 0$; Б) $2x^2 + 7 = 0$; В) $4x^2 - 9 = 0$

1) $-2{,}5; 1{,}5$ 2) $-1{,}5; 1{,}5$ 3) $1{,}5; -2{,}5$ 4) корней нет

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Решите уравнение $\dfrac{2x - 5}{6} = \dfrac{3 - 5x}{4}$.

Ответ: ______

2. Решите уравнение $x^2 - x - 6 = 0$.

Ответ: ______

3. Решите уравнение $2(x - 3) - 4x^2 = x - (2x + 1)^2$.

Ответ: ______

4. При каком значении m значения двучленов $18m^2 + 32m$ и $6m + 38m^2$ равны?

Ответ: ______

5. Найдите сумму корней уравнения $16x^2 - 4 = 0$.

Ответ: ______

6. Какое выражение нужно подставить вместо многоточия, чтобы было верным равенство $(x^2 - 4)(\ \dots\ ) = 4x^4 - 14x^2 - 8$?

1) $4x^2 + 2$ 2) $4x^2 - 2$ 3) $x^2 + 2$ 4) $x^2 - 2$

7. При каких значениях параметра k уравнение $kx^2 - 5x + \frac{1}{4}k = 0$ имеет единственный корень?

Ответ: ______

8. Соотнесите квадратные уравнения и их корни.

А) $x^2 - 14x + 49 = 0$; Б) $x^2 - 7 = 0$; В) $x^2 - 7x = 0$

1) $x_{1,2} = 7$ 2) $x_1 = -\sqrt{7}, x_2 = \sqrt{7}$ 3) $x_1 = 0, x_2 = 7$

Ответ:

А	Б	В

§ 12. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Основные сведения

Системой уравнений называется некоторое количество уравнений, которые должны выполняться одновременно. **Решением системы** уравнений с двумя переменными называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство. **Решить систему** уравнений — значит найти все её решения или установить, что их нет.

Некоторые способы решений системы уравнений.

Способ подстановки. Из какого-либо уравнения следует выразить одну переменную через другую. Подставить полученное для переменной выражение в другое уравнение и решить его. Сделать подстановку найденного значения переменной и вычислить значение второй переменной.

Способ сложения. Следует уравнять модули коэффициентов при какой-нибудь переменной. Складывая или вычитая полученные уравнения, найти одно неизвестное. Подставить найденное значение в одно из исходных уравнений исходной системы, найти второе неизвестное.

Графический способ. Решая систему уравнений графическим способом, следует выразить одну переменную через другую (например, y через x) в каждом уравнении. Построить в одной системе координат график каждого уравнения. Определить координаты точки пересечения. Сделать проверку.

Демонстрационный вариант

1. Выразите из уравнения $2x - \frac{1}{2}y = 7$ переменную x через y.

   1) $x = \frac{1}{4}y + 3{,}5$ 2) $x = y + 3{,}5$ 3) $y = 4x - 14$ 4) $x = \frac{1}{2}y + 7$

   Решение. $2x - \frac{1}{2}y = 7 \Leftrightarrow 2x = \frac{1}{2}y + 7 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}y + 3{,}5.$

   Из предложенных ответов верным является 1).

   Ответ: 1.

2. Гипербола, изображённая на рисунке 17, задаётся уравнением $y = \dfrac{3}{x}$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

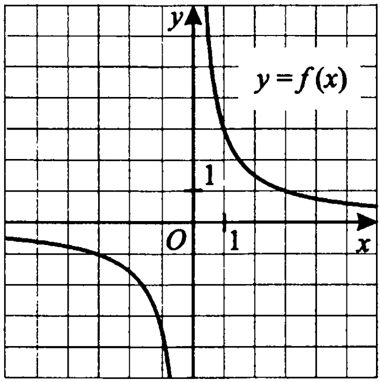


Рис. 17.

Системы уравнений	**Утверждения**
А) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = x - 2 \end{cases}$	1) система имеет одно решение
Б) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2 - x \end{cases}$	2) система имеет два решения
В) $\begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = 2 \end{cases}$	3) система не имеет решений

Решение. Рассмотрим каждую из представленных систем уравнений. В каждой из систем уравнений первое уравнение соответствует гиперболе, изображённой на рисунке, а второе — прямой.

В случае А угловой коэффициент прямой положителен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией острый). Следовательно, прямая пересекает гиперболу в двух точках, и система имеет два решения, что соответствует утверждению 2).

В случае Б угловой коэффициент прямой отрицателен (угол между положительным направлением оси абсцисс и данной прямой линией тупой). Заметим, что прямая проходит через точку с координатами (1; 1), и следовательно, прямая не пересекает гиперболу. В этом случае система не имеет решений, что соответствует утверждению 3).

В случае В прямая проходит через точку с координатами $(0;2)$ параллельно оси абсцисс. Следовательно, прямая пересекает гиперболу в одной точке, и система имеет одно решение, что соответствует утверждению 1).

Ответ:

А	Б	В
2	3	1

3. Из пар чисел $(3;-1)$, $(-9;3)$, $(2;1)$, $(1;2)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений
$$\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ 10x - 11y = 9. \end{cases}$$

1) $(3;-1)$ 2) $(-9;3)$ 3) $(2;1)$ 4) $(1;2)$

Решение. Подставим каждую из заданных пар чисел в систему уравнений и проверим, обращается ли каждое уравнение системы в верное равенство.

Подставляя пару чисел $(3;1)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 3 + 11 \cdot 1 \neq 15, \\ 10 \cdot 3 - 11 \cdot 1 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(-9;3)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot (-9) + 11 \cdot 3 = 15, \\ 10 \cdot (-9) - 11 \cdot 3 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(2;1)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 11 \cdot 1 = 15, \\ 10 \cdot 2 - 11 \cdot 1 = 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа являются решением данной системы уравнений.

Подставляя пару чисел $(1;2)$, получим $\begin{cases} 2 \cdot 1 + 11 \cdot 2 \neq 15, \\ 10 \cdot 1 - 11 \cdot 2 \neq 9. \end{cases}$ Следовательно, эти числа не являются решением данной системы уравнений.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. Вычислите координаты точки пересечения прямых $2x + 3y = 11$ и $3x + 2y = 9$.

Решение. Задача сводится к решению системы уравнений
$$\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 3x + 2y = 9. \end{cases}$$
Решим систему способом сложения (см. «Основные сведения» к параграфу).

Умножая первое уравнение системы на 2, второе — на -3 и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} -5x = -5, \\ 3x + 2y = 9; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 3. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3).

5. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x - 3y = -20, \\ 5y - 2x = 25. \end{cases}$

1) $(-15; 20)$ 2) $(25; 15)$ 3) $(5; 25)$ 4) $(-10; -25)$

Решение.

Решим систему способом подстановки (см. «Основные сведения» к параграфу). Из первого уравнения выразим x через y.

Получим $x = 3y - 20$. Подставим во второе уравнение системы вместо x найденное выражение $3y - 20$. Система примет вид

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 2 \cdot (3y - 20) = 25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y - 20, \\ 5y - 6y + 40 = 25; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 3y - 20, \\ y = 15; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 25, \\ y = 15. \end{cases}$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. Найдите $x_0 + 2y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{y}{4} - \frac{x}{5} = 6, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения. Умножая первое уравнение системы на $\frac{1}{3}$ и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} \frac{2y}{12} = 2, \\ \frac{x}{15} + \frac{y}{12} = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ \frac{x}{15} = -1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 12, \\ x = -15. \end{cases}$$

Следовательно, $x_0 = -15$, $y_0 = 12$; $x_0 + 2y_0 = -15 + 2 \cdot 12 = 9$.

Ответ: 9.

7. Найдите наименьшее значение выражения $(9x + 2y - 13)^2 + (3x - 4y + 5)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

Решение. Значение заданного выражения не может быть отрицательным, так как выражение представляет собой сумму квадратов трёх-членов. Следовательно, наименьшее значение, которое может достигать исходное выражение, равно 0. Это возможно только для x и y, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} 9x + 2y - 13 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0. \end{cases}$$

Решим систему способом сложения. Умножая первое уравнение системы на 2 и складывая почленно уравнения системы, получим

$$\begin{cases} 21x - 21 = 0, \\ 3x - 4y + 5 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2. \end{cases}$$

Ответ: 0; $x = 1$; $y = 2$.

8. Для каждой пары прямых (см. рис. 18) укажите соответствующую систему уравнений.

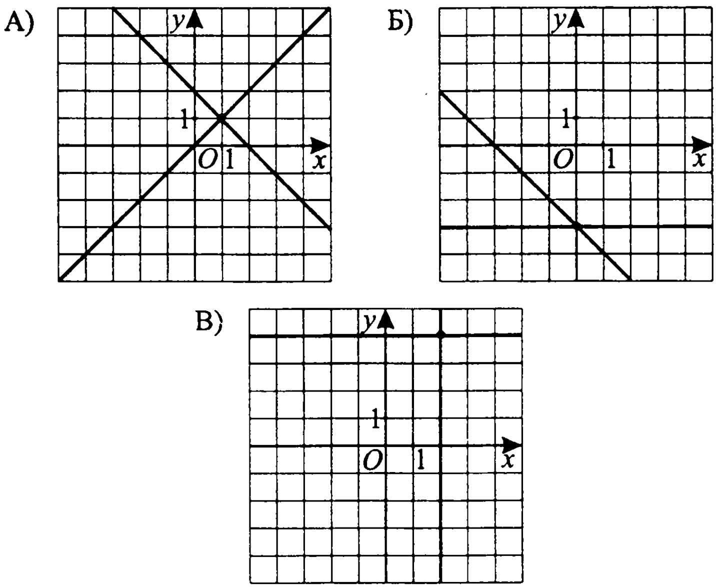


Рис. 18.

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = -x + 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x - 3, \\ y = -3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y = 4, \\ x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 4x, \\ y = 2x \end{cases}$

Решение. Одна из прямых, изображённая на рисунке 18 А, проходит через точки с координатами $(0; 0)$, $(1; 1)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = x$. Другая — через точки с координатами $(0; 2)$, $(2; 0)$ задаётся уравнением $y = -x + 2$. Этим прямым соответствует система уравнений 1).

На рисунке 18 Б одна из прямых проходит через точки с координатами $(0; -3)$, $(-3; 0)$ и, следовательно, задаётся уравнением $y = -x - 3$. Другая параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; -3)$, следовательно, задаётся уравнением $y = -3$. Этим прямым соответствует система уравнений 2).

На рисунке 18 В одна из прямых параллельна оси ординат и проходит через точку с координатами $(2; 0)$, следовательно, задаётся уравнением $x = 2$. Другая параллельна оси абсцисс и проходит через точку с координатами $(0; 4)$, следовательно, задаётся уравнением $y = 4$. Этим прямым соответствует система уравнений 3).

Ответ:

А	Б	В
1	2	3

Вариант № 1

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 7x - 3y = 11, \\ 2x + 3y = 7. \end{cases}$

1) $(1; 3)$ 2) $(0; 3)$ 3) $(1; 2)$ 4) $(2; 1)$

2. Окружность, изображённая на рисунке 19, задаётся уравнением $x^2 + y^2 = 9$. Используя рисунок, установите соответствие между системами уравнений и утверждениями.

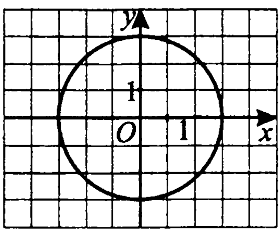


Рис. 19.

Системы уравнений

А) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x. \end{cases}$

Б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = x - 9. \end{cases}$

В) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ y = -3. \end{cases}$

Утверждения

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

Ответ:

А	Б	В

3. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = x^2, \\ \dots \end{cases}$ так, чтобы она имела одно решение.

1) $y = x$ 2) $y = \dfrac{1}{x}$ 3) $y = -x$ 4) $y = 1$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{6}{x} - \dfrac{8}{y} = -2, \\ \dfrac{9}{x} + \dfrac{10}{y} = 8. \end{cases}$

Ответ: ______

5. В координатной плоскости построены графики уравнений $2x^2 + y = 2$ и $2x + y = -2$ (см. рис. 20). Используя эти графики, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2x^2 + y = 2, \\ 2x + y = -2. \end{cases}$

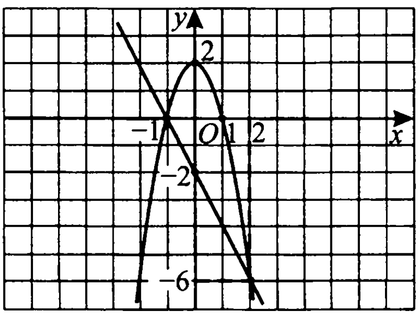


Рис. 20.

1) $(0; -1)$, $(2; -6)$ 2) $(-1; 0)$, $(-6; 2)$
3) $(-1; 0)$, $(2; -6)$ 4) $(0; 1)$, $(2; -6)$

6. Координатная плоскость подвергается следующему преобразованию: точка с координатами (x, y) переходит в точку с координатами (x^2, y^2). Найдите координаты всех точек, которые при этом преобразовании останутся на своих прежних местах.

1) $(-1; 0)$

2) $(0; -1)$, $(-1; -1)$

3) $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$

4) $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(-1; 1)$, $(-1; -1)$

7. Найдите наименьшее значение выражения $(x+2y)^2+(x+y-1)^2$ и значения x и y, при которых оно достигается.

Ответ: ______

8. Для каждого графика (см. рис. 21) укажите соответствующую ему систему уравнений.

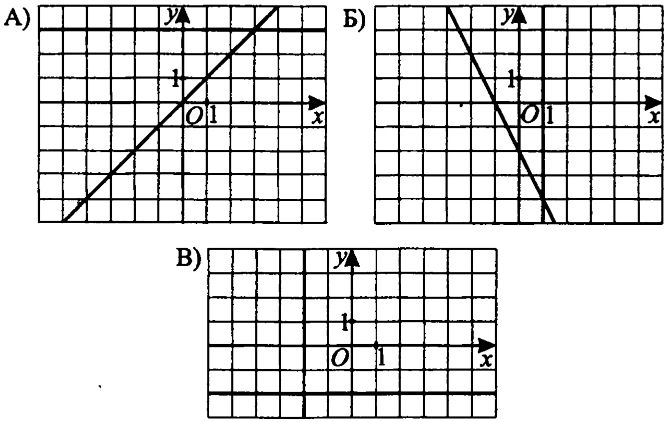


Рис. 21.

1) $\begin{cases} -2x-y=2, \\ x=1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=3+x, \\ y=x. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y=x, \\ y=3. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x=-2, \\ y=-2. \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 4x+y=2, \\ 6x-y=8. \end{cases}$

1) $(-2;1)$ 2) нет решений 3) $(-2;-1)$ 4) $(1;-2)$

2. На рисунке 22 изображён график функции $y=\sqrt{x-2}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

А) $\begin{cases} y=\sqrt{x-2}, \\ y=x-2. \end{cases}$

Б) $\begin{cases} y=\sqrt{x-2}, \\ y=-x-1. \end{cases}$

В) $\begin{cases} y=\sqrt{x-2}, \\ y=-x+2. \end{cases}$

1) система имеет одно решение

2) система имеет два решения

3) система не имеет решений

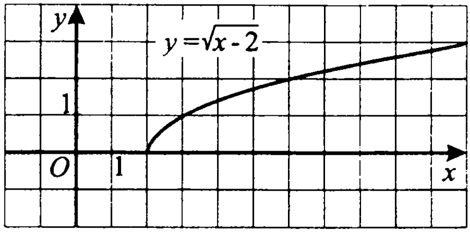


Рис. 22.

Ответ:

А	Б	В

3. Линейные функции заданы формулами:

А) $y = -10x + 3$, Б) $y = 15 - 10x$, В) $y = 5x$.

Графики каких функций пересекаются в точке $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$?

1) А; Б 2) А; В 3) Б; В 4) нет таких функций

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y + \dfrac{4}{7x - y} = 5, \\ 5x + 3y - \dfrac{4}{7x - y} = 3. \end{cases}$$

Ответ: ______

5. Пользуясь графиком (см. рис. 23), найдите решение системы
$$\begin{cases} y = 2x - 4, \\ y = -x - 1. \end{cases}$$

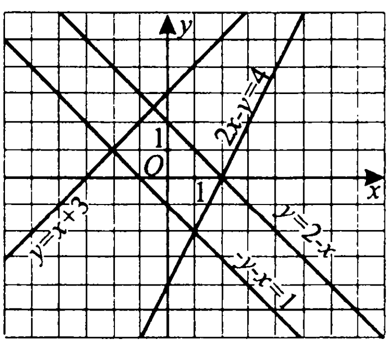


Рис. 23.

1) $(-2; 1)$ 2) $(1; -2)$ 3) $(-0{,}5; 2{,}5)$ 4) $(0; 2)$

6. Найдите координаты точки пересечения прямых $4x + 3y - 5 = 0$ и $-2x + y + 5 = 0$.

1) $\left(0; \frac{5}{3}\right)$ 2) $(1; -3)$ 3) $(3; -1)$ 4) $(2; -1)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x - 1, \\ x^2 - 2y = 26. \end{cases}$

Ответ: ______

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Выразите из уравнения $3x + 2y = 5$ переменную x через переменную y.

1) $x = \dfrac{5 + 2y}{2}$ 2) $x = \dfrac{5 - 2y}{3}$ 3) $x = 3(5 - 2y)$ 4) $x = 3(5 + 2y)$

2. На рисунке 24 изображён график функции $y = \sqrt{2 - x}$. Используя этот рисунок, для каждой системы уравнений укажите соответствующее ей утверждение.

А) $\begin{cases} y = \sqrt{2 - x}, \\ y = 2 - x. \end{cases}$ 1) система имеет одно решение

Б) $\begin{cases} y = \sqrt{2 - x}, \\ y = x - 2. \end{cases}$ 2) система имеет два решения

В) $\begin{cases} y = \sqrt{2 - x}, \\ y = -1. \end{cases}$ 3) система не имеет решений

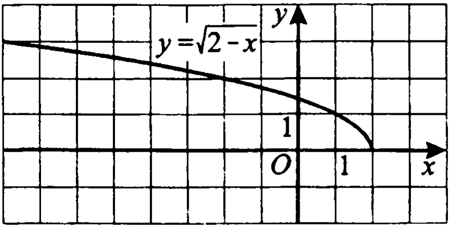


Рис. 24.

Ответ:

А	Б	В

3. Из пар чисел $(-1;0)$; $(0;-1)$; $(-1;-1)$; $(1;1)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ y=-2x+3. \end{cases}$

1) $(-1;0)$ 2) $(0;-1)$ 3) $(-1;-1)$ 4) $(1;1)$

4. На рисунке 25 изображены графики функций $y = \dfrac{4}{x}$, $y = x^2 - 2$.

Пользуясь рисунком, решите систему уравнений $\begin{cases} y=\dfrac{4}{x}, \\ y=x^2-2. \end{cases}$

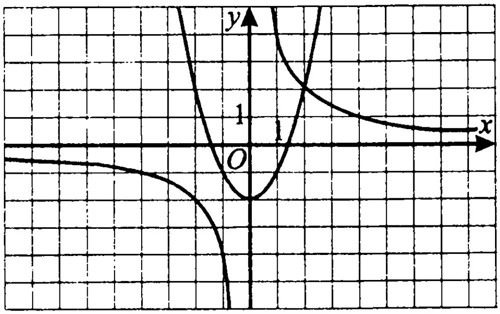


Рис. 25.

Ответ: ______

5. Найдите решение системы уравнений

$\begin{cases} 5x+y=16, \\ 3x-2y=7. \end{cases}$

1) $(-1;-3)$ 2) $(1;-3)$ 3) $(3;1)$ 4) $(-3;1)$

6. Найдите $2x_0+3y_0$, если $(x_0;y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{3}=\dfrac{13}{36}, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{2}=\dfrac{13}{36}. \end{cases}$$

Ответ: ______

7. Найдите координаты точек пересечения параболы

$y=\dfrac{1}{3}x^2-2x+4$ и прямой $2x-y-5=0$.

Ответ: ______

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2-6x+y=2, \\ y-\sqrt{x-3}=9. \end{cases}$

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Выразите из уравнения $5x - 2y = 3$ переменную x через y.

1) $\frac{5y+3}{2}$ 2) $\frac{5y-3}{2}$ 3) $\frac{3+2y}{5}$ 4) $\frac{3-2y}{5}$

2. Из пар чисел $(2;1)$; $(-2;-1)$; $(2;-1)$; $(-2;1)$ выберите ту, которая является решением системы уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

1) $(2;1)$ 2) $(-2;-1)$ 3) $(2;-1)$ 4) $(-2;1)$

3. Укажите систему уравнений, которая имеет решение $(-1;3)$ (см. рис. 26).

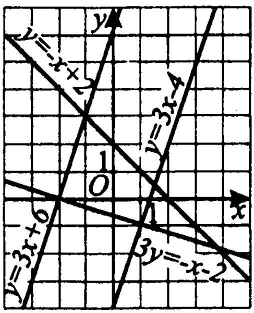


Рис. 26.

1) $\begin{cases} y = 3x + 6, \\ 3y = -x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3y = -x - 2, \\ y = 3x - 4 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = -x + 2, \\ y = 3x + 6 \end{cases}$

4. При каких значениях k прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек ни с параболой $y = x^2 + 3x - 1$, ни с параболой $y = x^2 - x + 2$?

Ответ: ______

5. Найдите $3x_0 - y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} y + 3x + 1 = 0, \\ y + x - 1 = 0. \end{cases}$$

1) -5 2) -3 3) 3 4) 5

6. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x - 2y = 3. \end{cases}$

1) $(4; 4{,}5)$ 2) $(4; 5)$ 3) $(2; 1)$ 4) $(3; 3)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 7x - 5, \\ y = 7x + 4. \end{cases}$

Ответ: ______

8. Для каждой пары прямых (см. рис. 27) укажите соответствующую систему уравнений.

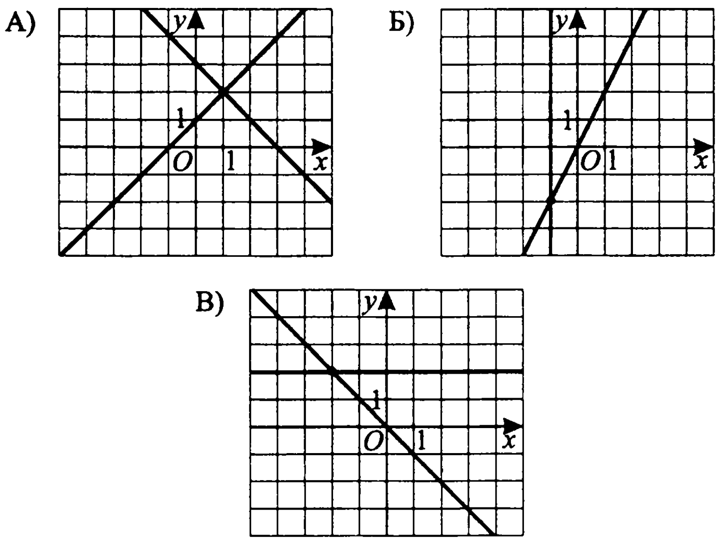


Рис. 27.

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 1, \\ y = -x + 3. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 1, \\ y = x + 1. \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y = 2x, \\ x = -1. \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Из уравнения $4y = 3x + 4$ выразите переменную x через y.

1) $x = \dfrac{4y - 4}{3}$ 2) $x = \dfrac{4y + 4}{3}$ 3) $x = 3(4y - 4)$ 4) $x = 3(4y + 4)$

2. Какая из предложенных пар чисел является решением системы уравнений $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$?

1) $(-1; 1)$ 2) $(1; -1)$ 3) $(2; 3)$ 4) $(1{,}5; 0)$

3. Какая из предложенных систем уравнений не имеет решений?

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x - 3y = -6, \\ y - x = -2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x = 2(2 - y), \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - x = 5, \\ x + 3y = 3 \end{cases}$

4. При каких значениях k парабола $y = 2x^2 + 2kx + 6$ и прямая $y = -k - 6$ не имеют общих точек?

Ответ: ______

5. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 4x + y = 4, \\ 5y + 2x = -7. \end{cases}$

1) $(1{,}5; 2)$ 2) $(-1{,}5; 2)$ 3) $(1{,}5; -2)$ 4) $(-1{,}5; -2)$

6. Найдите $x_0 - 3y_0$, если $(x_0; y_0)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} 5(2x - y) - (5y - 3x) = -1, \\ 3(5y - 3x) - 2(2x - y) = 10{,}8. \end{cases}$$

Ответ: ______

7. Найдите координаты точек пересечения прямой $y - x - 3 = 0$ с окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

Ответ: ______

8. Для каждого графика (см. рис. 28) укажите систему, решением которой являются координаты точки пересечения прямых, изображённых на этом графике.

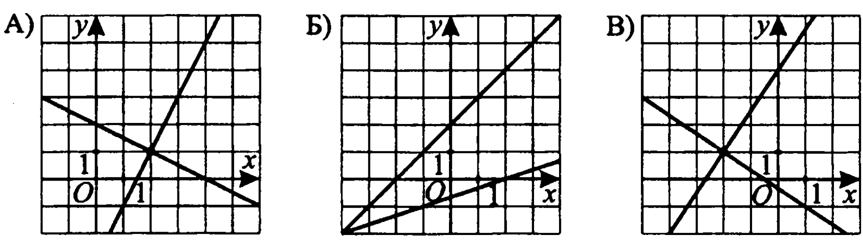


Рис. 28.

1) $\begin{cases} y - x = 2, \\ 3y = x - 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2y + x = 4, \\ y - 2x + 3 = 0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2y - 3x = 4, \\ 3y + 2x = 2 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2y - 3x = 8, \\ 3y + 2x + 1 = 0 \end{cases}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 5y - x = 3. \end{cases}$

1) $(1; 1)$ 2) $(2; 1)$ 3) $(1; 2)$ 4) $(-1; -2)$

2. Используя график (см. рис. 29), найдите решение системы уравнений $\begin{cases} y + x + 2 = 0, \\ x - y = 0. \end{cases}$

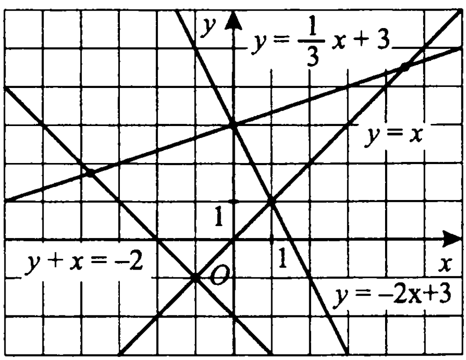


Рис. 29.

1) $(1; 1)$ 2) $(-1; -1)$ 3) $(0; 3)$ 4) $(-4; 2)$

3. Используя графическую интерпретацию, выберите из данных уравнений второе уравнение системы $\begin{cases} y = -x, \\ \ldots \end{cases}$ так, чтобы она не имела решений.

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = -\frac{1}{x}$ 3) $y = x$ 4) $y = x^2$

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{y} = 10, \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{1}{y} = 9. \end{cases}$

Ответ: ______

5. На рисунке 30 изображены графики функций $y = 2 - |x|$, $y = |x| - 3$.

Используя рисунок, найдите решение системы уравнений $\begin{cases} |x| = 2 - y, \\ |x| - y = 3. \end{cases}$

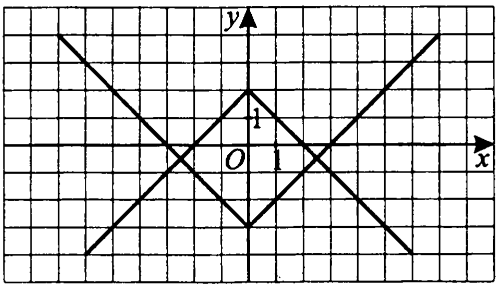


Рис. 30.

1) $(-2; 2)$, $(-3; 3)$ 2) $(-2{,}5; -0{,}5)$, $(2{,}5; -0{,}5)$
3) $(2; 0)$, $(3; 0)$ 4) $(-2{,}5; 0{,}5)$, $(2{,}5; 0{,}5)$

6. Найдите решение системы уравнений $\begin{cases} 2xy + y^2 = 15, \\ |x - y| = 6. \end{cases}$

1) $(-7; -1)$, $(-1; 5)$, $(1; -5)$, $(7; 1)$

2) $(7; -1)$, $(5; -1)$, $(-1; -5)$, $(-7; 1)$

3) $(-7; 5)$, $(-5; 7)$, $(7; -5)$, $(5; -7)$

4) $(-7; 1)$, $(1; 5)$, $(7; 5)$, $(5; 7)$

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 + 11x - 10, \\ y = 11x + 15. \end{cases}$

Ответ: ______

8. Найдите все значения x и y, при которых каждое из выражений $\dfrac{20x + 14}{4x + y + 3}$, $\dfrac{x^2 + 8}{2y + 13 - 6x}$ не определено.

Ответ: ______

§ 13. Составление математической модели по условию текстовой задачи

Основные сведения

Текстовые задачи условно можно разбить на следующие основные группы:

Задачи на движение. В задачах «на движение» обычно требуется найти либо скорость движения какого-либо объекта, либо время, за которое тот или иной объект проходит определённое расстояние, либо расстояние между некоторыми объектами, преодолевающими это расстояние при определённых условиях.

Такого рода задачи решаются, как правило, обозначением одного или нескольких неизвестных через переменную, а затем либо составляется уравнение (система уравнений) на основе данных задачи, либо проводится последовательность рассуждений, позволяющая получить из данных через некоторые промежуточные действия искомое значение.

Задачи на производительность («на работу»). В задачах на производительность основными данными обычно являются

1. Производительность нескольких объектов (например, комбайнёров, рабочих, учеников и пр.). Производительность каждого из объектов будем обозначать через $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Общую производительность объектов будем обозначать через P. Понятно, что $P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n$.

2. Время, затраченное на выполняемую работу каждым из объектов, — $t_1, t_2, \ldots, t_n$. В случае совместной работы общее время — T.

3. Объём работы, выполненной каждым из объектов: $w_1, w_2, \ldots, w_n$ и суммарный объём выполненной работы W. Тогда
$W = w_1 + w_2 + \ldots + w_n$.

Суммарный объём W иногда принимают за единицу.

Перечисленные данные связаны между собой основным соотношением: $PT = W$ (аналог известной формулы из физики $vt = s$, где v — скорость, t — время, s — расстояние). Из этого соотношения, в зависимости от данных задачи, легко получить другие соотношения. Например, если данными являются общий объём выполненной работы, время, потраченное на эту работу, и производительность каждого из объектов, то используем формулу

$$(p_1 + p_2 + \ldots + p_n)T = W. \qquad (1)$$

Если данными являются объём работы, выполненной каждым из объектов, производительность каждого из объектов и суммарное время, затраченное на их работу, то получаем

$$\frac{w_1}{p_1} + \frac{w_2}{p_2} + \ldots + \frac{w_n}{p_n} = T \ \ (\text{здесь}\, T = t_1 + \cdots + t_n). \qquad (2)$$

Если известно, что один из объектов выполнил свой объём работы быстрее (медленнее), чем другой свой объём на время t, к примеру, первый объект работал быстрее второго, то приходим к соотношению

$$\frac{w_2}{p_2} - \frac{w_1}{p_1} = t. \qquad (3)$$

Аналогичным образом можно получить другие соотношения.

Задачи на проценты, концентрацию, части и доли.

Концентрация (c) данного вещества в смеси — это отношение количества чистого вещества m в смеси к общему количеству M смеси, если они измерены одной и той же единицей массы

$$c = \frac{m}{M}.$$

Учитывая, что $0 \leqslant m \leqslant M$, значение концентрации $0 \leqslant c \leqslant 1$. Если $c = 0$, то в рассматриваемой смеси «чистое вещество» отсутствует ($m = 0$). Если c $= 1$, то рассматриваемая смесь состоит из «чистого вещества» ($m = M$).

Процентным содержанием чистого вещества в смеси называют его долю, выраженную в процентном отношении: $c \cdot 100\%$. Иногда, говоря о концентрации, подразумевают процентное содержание чистого вещества в смеси.

Если сливают две смеси с массами m_1 и m_2 с концентрациями в них некоторого вещества c_1 и c_2 соответственно, то концентрация данного вещества в новой смеси равна

$$c = \frac{c_1 m_1 + c_2 m_2}{m_1 + m_2}.$$

Масса данного вещества равна сумме масс данного вещества в отдельных смесях, т.е. $c_1 m_1 + c_2 m_2$.

10. Зак. № 199

Демонстрационный вариант

1. Прочитайте задачу. «Поверхность бассейна имеет форму прямоугольника со сторонами 18 м и 25 м. Вокруг бассейна дорожка одной и той же ширины (см. рис. 31). Площадь, которую занимает поверхность бассейна с дорожкой, равна 638 м^2. Какова ширина дорожки?»

Пусть ширина дорожки x м. Какое уравнение соответствует условию задачи?

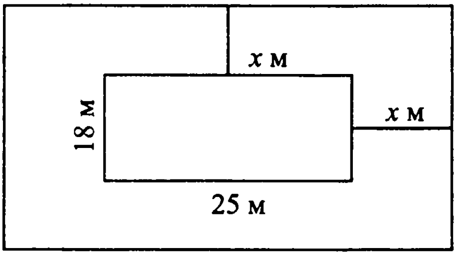


Рис. 31.

1) $(18 + x)(25 + x) = 638$

2) $2(18x + 25x) + 18 \cdot 25 = 638$

3) $(18 + 2x)(25 + 2x) = 638$

4) $x(18 + 25) \cdot 2 = 638$

Решение. Если x м — ширина дорожки, то, согласно рисунку, длина площадки, которую занимает поверхность бассейна с дорожкой, равна $(25+2x)$ м, ширина — $(18+2x)$ м. Следовательно, площадь поверхности бассейна с дорожкой равна $(25 + 2x)(18 + 2x)$, что, согласно условию, составляет 638 м^2. Получаем уравнение: $(25 + 2x)(18 + 2x) = 638$. Значит, из предложенных вариантов ответов уравнение 3) соответствует условию задачи.

Ответ: 3.

2. На три полки поставили 218 книг. На первую поставили на 13 книг больше, чем на вторую, а на третью полку — в 3 раза больше, чем на вторую. Сколько книг на второй полке? Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — количество книг на второй полке.

1) $5x + 13 = 218$ 2) $5x - 13 = 218$

3) $2x + 13 + \frac{x}{3} = 218$ 4) $2x + 13 - \frac{x}{3} = 218$

Решение. Пусть x — количество книг на второй полке, тогда на первой полке — $(x + 13)$ книг, а на третьей — $3x$ книг. Всего на трёх полках 218 книг. Получаем уравнение $x + 13 + x + 3x = 218$. Отсюда, $5x + 13 = 218$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. Прочитайте задачу: «В двух санаториях отдыхает 750 человек. В одном санатории отдыхающих было в 1,5 раза больше, чем в другом. Найдите число отдыхающих в каждом санатории».

Пусть a и b — количество отдыхающих в санаториях, причём $b > a$. Какая система уравнений удовлетворяет условию задачи?

1) $\begin{cases} a + b = 750, \\ 2a = 3b \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3a + 2b = 750, \\ 3b = 2a \end{cases}$

3) $\begin{cases} a + b = 750, \\ 3a = 2b \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2a + 3b = 750, \\ 3a = 2b \end{cases}$

Решение. Если a и b — количество отдыхающих в каждом из санаториев, то учитывая, что общая численность отдыхающих равна 750 человек, получаем $a + b = 750$.

Так как по условию $b > a$ и в одном из санаториев в 1,5 раза больше отдыхающих, чем в другом, то $1{,}5a = b$, или $\frac{3}{2}a = b \Rightarrow 3a = 2b$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a + b = 750, \\ 3a = 2b. \end{cases}$$

Следовательно, из предложенных только система 3) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 3.

4. Математик получил заказ составить 42 задачи за x дней. Если бы он составлял в день на 7 задач больше, то закончил бы работу на день раньше. Определите x. Какое из приведённых уравнений соответствует условию задачи?

1) $42x + 7 = 42(x - 1)$ 2) $\frac{42}{x - 7} = \frac{42}{x - 1}$

3) $\frac{42}{x} - 7 = \frac{42}{x - 1}$ 4) $\frac{42}{x} + 7 = \frac{42}{x - 1}$

Решение. По условию задачи математик получил заказ составить 42 задачи за x дней, то он есть должен был составлять $\frac{42}{x}$ задачи в день.

Если бы он составлял в день на 7 задач больше, то закончил бы работу на день раньше, то есть составлял бы $\frac{42}{x-1}$ задачи в день. Учитывая эти условия, получаем уравнение $\frac{42}{x} + 7 = \frac{42}{x-1}$.

Следовательно, из предложенных ответов только уравнение 4) удовлетворяет условию задачи.

Ответ: 4.

5. Из деревни в город выезжает мотоциклист и едет с постоянной скоростью 50 км/ч. Через 20 минут после мотоциклиста из деревни в город выезжает автомобиль и едет с постоянной скоростью 80 км/ч. Какова длина пути от деревни до города, если мотоциклист и автомобиль прибыли в город одновременно? Пусть S км — длина пути от деревни до города. Какое из данных уравнений соответствует условию задачи?

1) $\frac{S}{50} + 20 = \frac{S}{80}$ 2) $\frac{S}{50} = \frac{50}{80} + 20$

3) $80S + 0{,}2 = 50S$ 4) $\frac{S}{50} - \frac{S}{80} = \frac{1}{3}$

Решение. $\frac{S}{50}$ ч — время движения мотоцикла; $\frac{S}{80}$ ч — время движения автомобиля. По условию мотоцикл затратил на дорогу на 20 минут больше, чем автомобиль. 20 мин $= \frac{20}{60}$ ч $= \frac{1}{3}$ ч. Составим уравнение: $\frac{S}{50} - \frac{S}{80} = \frac{1}{3}$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

6. Один нагреватель нагревает воду в бассейне за 4 часа, второй — за 6 часов. За какое время нагреется вода в бассейне, если работают оба нагревателя?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если t — время (в часах), за которое нагреется вода при двух работающих нагревателях.

1) $t = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 2) $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$ 3) $t = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$ 4) $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$

Решение. Примем объём воды в бассейне за 1. За один час I нагреватель может нагреть $\frac{1}{4}$ часть воды, а II — $\frac{1}{6}$ часть воды. При двух работающих нагревателях за 1 час нагревается $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ часть воды, что составит $\frac{1}{t}$. Следовательно, $\frac{1}{t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$. Из предложенных ответов только уравнение 2) соответствует условию задачи.

Ответ: 2.

7. В кувшине находится 2 л разбавленного яблочного сока, причём его концентрация равна 80%. Из кувшина вылили 0,5 л жидкости и влили столько же чистой воды. После этого вылили ещё 1 л получившейся жидкости и влили столько же разбавленного яблочного сока с концентрацией 75%. Какова концентрация сока в полученной смеси?

Решение. Концентрация 80% означает: $\frac{80}{100} = 0{,}8$. После первого действия чистого сока осталось $(2 - 0{,}5) \cdot 0{,}8 = 1{,}2$ (л). После того как вылили 1 л разбавленного сока (то есть половину), чистого сока в кувшине осталось $\frac{1{,}2}{2} = 0{,}6$ (л). Долив в кувшин 1 л сока с концентрацией 75%, добавили $1 \cdot 0{,}75 = 0{,}75$ (л) чистого сока. Значит, всего в двух литрах смеси $0{,}6 + 0{,}75 = 1{,}35$ чистого сока. Концентрация смеси: $\frac{1{,}35}{2} \cdot 100\% = 67{,}5\%$ (см. «Основные сведения» к параграфу).

Ответ: 67,5%.

8. Дети посадили во дворе школы два дерева — ёлку и яблоню. Общая высота деревьев на момент посадки составляла 2,4 м. За каждый год яблоня вырастает на $\frac{2}{5}$ от первоначальной высоты ёлки. Какова была высота ёлки в день посадки, если известно, что через два года ёлка была в 1,2 раза ниже яблони и выросла на 0,35 м от первоначальной высоты яблони?

Решение. Пусть x м — высота ёлки, y м — высота яблони на момент посадки. Тогда, согласно условию, $x + y = 2{,}4$. Через два года после посадки высота яблони составила $y + 2 \cdot \frac{2}{5}x$, а высота ёлки через два года составила $y + 0{,}35$. Так как через два года ёлка была в 1,2 раза ниже яблони, то получаем $y + \frac{4}{5}x = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2$.

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} y + \frac{4}{5}x = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2, \\ x + y = 2{,}4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y + \frac{4}{5}(2{,}4 - y) = (y + 0{,}35) \cdot 1{,}2; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y - 0{,}8y - 1{,}2y = 0{,}42 - 1{,}92; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2{,}4 - y, \\ y = 1{,}5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}9, \\ y = 1{,}5. \end{cases}$$

Ответ: 0,9.

Вариант № 1

1. Прочитайте задачу. «Клумба имеет форму круга диаметром 8 м. Вокруг клумбы дорожка одной и той же ширины (см. рис. 32). Площадь, которую занимает клумба с дорожкой, равна 36π м^2. Какова ширина дорожки?»

Пусть ширина дорожки x м. Какое уравнение соответствует условию задачи?

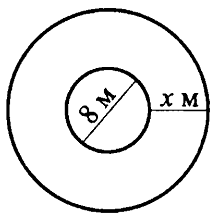


Рис. 32.

1) $\pi(8 + x)^2 = 36\pi$ 2) $\pi(8 + 2x)^2 = 36\pi$

3) $\frac{(8 + x)^2\pi}{4} = 36\pi$ 4) $\pi(4 + x)^2 = 36\pi$

2. На первой полке книг в 3 раза больше, чем на второй, и на 15 книг меньше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на трёх полках 120 книг?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено количество книг на первой полке.

1) $3x + 15 = 120 - x$ 2) $x + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + 15 = 120$

3) $\frac{7}{3}x - 15 = 120$ 4) $\frac{7}{3}x + 15 = 120$

3. Из двух пунктов, расстояние между которыми 45 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Скорость первого велосипедиста на 3 км/ч больше скорости второго велосипедиста. Определите скорость первого велосипедиста, если они встретились через 1 ч 30 мин после их выезда.

Обозначив через x скорость первого велосипедиста (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $2x - 3 = 30$ 2) $2x + 3 = 30$

3) $1{,}5(x + (x + 3)) = 30$ 4) $1{,}5(x + (x + 3)) = 45$

4. Расстояние между пристанями 30 км. Лодка проплыла от одной пристани до другой и вернулась обратно, затратив на весь путь 6 часов. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки 2 км/ч?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначена собственная скорость лодки (в км/ч).

1) $\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x+2} = 6$ 2) $\frac{5}{x+2} + \frac{5}{x-2} = 6$

3) $\frac{5}{x+2} + \frac{5}{x-2} = 1$ 4) $30(x + 2) - 30(x - 2) = 6$

5. Расстояние от посёлка до станции автобус проходит за 3 часа, а автомобиль — за 2 часа. Чему равно расстояние от посёлка до станции, если скорость автомобиля на 35 км/ч больше скорости автобуса?

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если через x обозначено расстояние (в км) от посёлка до станции.

1) $3x - 2x = 35$ 2) $35\left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) = 1$

3) $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 35$ 4) $\frac{x}{3} - \frac{x}{2} = 35$

6. В парке посадили одинаковыми рядами 40 кустов роз. Кустов в каждом ряду оказалось на 6 больше, чем рядов. Сколько кустов в каждом ряду и сколько рядов в парке?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x принять число посаженных рядов.

1) $\frac{40}{x} = x + 6$ 2) $40(x + 6) = x$

3) $40x = 7 + x$ 4) $x^2 - 40x - 200 = 0$

7. При консервировании фруктов банок с абрикосовым компотом было закупорено на 10% больше, чем банок с вишнёвым компотом. Причём с вишнёвым компотом трёхлитровых банок было закупорено на 25% больше, а литровых — на 15% меньше, чем с абрикосовым компотом. Сколько процентов составляют трёхлитровые банки с абрикосовым компотом от всех закупоренных с этим компотом банок? (Ответ округлите до целого числа.)

Ответ: ______

8. На промежутке 24 м переднее колесо трактора делает на 4 оборота больше заднего. Если длину окружности переднего колеса увеличить на 6 дм, то на том же промежутке переднее колесо сделает на 2 оборота больше заднего. Найдите в метрах длину окружности заднего колеса трактора.

Ответ: ______

Вариант № 2

1. Прочитайте задачу. «Из прямоугольного треугольника (с катетами, бóльшими двух), имеющего площадь, равную 6, вырезали квадрат, как показано на рисунке 33. После этого площадь оставшейся фигуры составила 5. Найдите величину стороны квадрата».

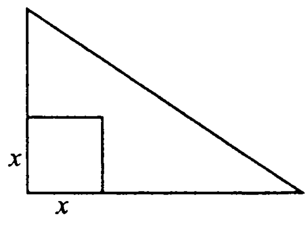


Рис. 33.

Пусть длина стороны вырезанного квадрата равна x. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $5x^2 = 6$ 2) $6x^2 = 5$ 3) $6 - x^2 = 5$ 4) $6 + x^2 = 5$

2. Если задуманное число увеличить на 23 и результат разделить на 10, получится 7. Найдите это число.

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если x — задуманное число.

1) $(x - 23) \cdot 10 = 7$ 2) $10 \cdot (x + 23) = 7$

3) $(x + 23) : 10 = 7$ 4) $10 : (x + 23) = 7$

3. Учебник по математике на 20 руб. дешевле учебника истории. Было куплено 2 учебника истории и 5 учебников математики на 600 руб.

Пусть x руб. — стоимость учебника истории, y руб. — стоимость учебника математики. Выберите систему уравнений, соответствующую условию задачи.

1) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 2x + 5y = 600 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 20 \\ 5x + 2y = 600 \end{cases}$

4. На покупку стиральной машины Сергей потратил 60% своих сбережений, а оставшуюся сумму он решил разделить поровну на подарки жене, сыну и дочери. Сколько решил потратить Сергей на подарок каждому члену своей семьи, если у него было 18 000 рублей?

Ответ: ______

5. Прочитайте условие задачи. «Из алюминиевого прямоугольника площадью 120 см^2 сделали коробку без крышки, вырезав по углам одинаковые квадраты и загнув края вверх (см. рис. 34). Чему должны быть равны стороны вырезанного квадрата, если размеры дна коробки 6 см и 4 см?»

Пусть стороны вырезанного квадрата равны x см. Какое уравнение соответствует условию задачи?

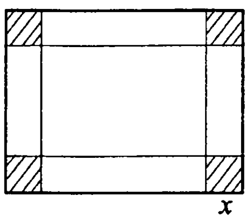


Рис. 34.

1) $(6 + x)(4 + x) = 120$ 2) $(6 - 2x)(4 - 2x) = 120$

3) $(6 + 2x)(4 + 2x) = 120$ 4) $6 \cdot 4 + 4x^2 = 120$

6. Если номер Васиной квартиры умножить на 4, а затем к результату прибавить 11, то получится 227. Определите номер квартиры, в которой живет Вася.

Обозначив номер Васиной квартиры за x, можно составить уравнение:

1) $4x + 11 = 227$ 2) $4(x + 11) = 227$

3) $x + 4 \cdot 11 = 227$ 4) другой ответ

7. Имеются два сплава, в первом из которых содержится 40%, а во втором — 20% серебра. Сколько килограммов второго сплава необходимо добавить к 20 кг первого сплава, чтобы получить сплав, содержащий 30% серебра?

Ответ: ______

8. Первый кран разгрузит баржу за 3 часа, второй кран разгрузит сухогруз за 8 часов. Во сколько раз производительность первого крана больше производительности второго, если первый кран разгрузит сухогруз на 10 часов быстрее, чем второй кран — баржу?

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Прочитайте задачу. «Из прямоугольного треугольника (с катетами, бóльшими 4,5), имеющего площадь, равную 12, вырезали квадрат, две стороны которого лежат на катетах. После этого площадь оставшейся фигуры составила 8. Найдите сторону вырезанного квадрата».

Пусть длина стороны квадрата равна x. Какое уравнение соответствует условию задачи?

1) $(x-8)(x-12)=20{,}25$ 2) $(x-12)(x-8)=0$

3) $x^2=12-8$ 4) $x^2=12+8$

2. Два зайца съедают определенное количество моркови за три дня. На сколько дней хватит моркови первому зайцу, если второй съедает это количество моркови на 1 день быстрее, чем первый?

Пусть первому зайцу хватит моркови на x дней, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=\frac{1}{3}$

2) $\frac{x}{x+3}=\frac{1}{3}$

3) $x+(x+3)=1$

4) $x+(x-1)=3$

3. Прочитайте условие задачи. «Прямоугольный участок земли обнесен забором, периметр которого 80 м. Площадь участка 231 м^2. Найдите длины сторон участка».

Если ширину участка обозначить x м, а его длину — y м, то какую систему уравнений можно составить по условию задачи?

1) $\begin{cases} x + y = 80, \\ xy = 231 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 40, \\ xy = 231 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{231}{x} = y, \\ \dfrac{231}{x} + y = 80 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2(x + y) = 231, \\ xy = 80 \end{cases}$

4. Два отряда ныряльщиков добывали жемчуг. Каждый человек из первого отряда достал 7 жемчужин, а каждый человек из второго отряда достал 3 жемчужины. Всего была добыта 61 жемчужина.

Сколько ныряльщиков в двух отрядах, если в первом отряде их количество на 3 больше, чем во втором?

Ответ: ______

5. Длина прямоугольника на 5 см больше его ширины. Найдите длину прямоугольника, если при её уменьшении на 1 см и увеличении ширины на 2 см площадь прямоугольника стала 48 см^2.

Какое уравнение соответствует условию задачи, если x см — длина прямоугольника?

1) $(x + 1)(x - 2) = 48$ 2) $(x - 1)(x - 3) = 48$
3) $(x - 1)(x + 7) = 48$ 4) $(x + 5)(x - 3) = 48$

6. Сторона первого квадрата на 5 см меньше стороны второго, а площадь первого — на 65 см^2 меньше площади второго. Найдите периметры этих квадратов.

Ответ: ______

7. Два насоса, работая вместе, могут наполнить бассейн за 48 минут. За сколько минут может наполнить бассейн первый насос, работая один, если второму на эту работу нужно на 20 минут больше?

Пусть первый насос может один наполнить бассейн за x минут, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{48} = \dfrac{1}{x + 20}$ 2) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x + 20} = \dfrac{1}{48}$

3) $(20 + x) + x = 48$ 4) $\dfrac{1}{x + 20} = \dfrac{1}{48}$

8. Из пункта A в пункт B выехал автомобиль, а навстречу ему из пункта B, одновременно с автомобилем, выехал автобус. Через некоторое время они встретились, а потом продолжили путь. Автобус через 16 часов после встречи приехал в пункт A, а автомобиль через 4 часа после встречи в пункт B. Сколько времени (в ч) провёл в пути автобус?

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Прочитайте задачу. «В центре газона прямоугольной формы длиной 20 м и шириной 15 м находится прямоугольный бассейн, длина и ширина которого пропорциональны длине и ширине газона. Площадь газона составляет 192 м^2. Определите длину бассейна.»

Пусть длина бассейна (в метрах) равна $4x$ (см. рис. 35). Какое уравнение соответствует условию задачи?

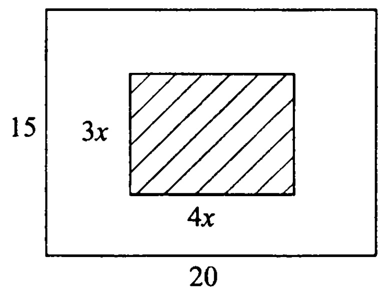


Рис. 35.

1) $300 \cdot 192 = 4x + 3x$ 2) $300 = 12x^2 + 192$

3) $(20 - 4x)(15 - 3x) = 192$ 4) $\dfrac{300 - 192}{300} = \dfrac{4x + 3x}{35}$

2. На первой полке книг в 2 раза меньше, чем на второй, и на 5 книг больше, чем на третьей. Сколько книг на первой полке, если на всех трёх полках 55 книг?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если за x обозначено количество книг на первой полке.

1) $5x - 5 = 55$ 2) $x + 2x + x - 5 = 55$

3) $3x - 5 = 55$ 4) $x + 2x - x + 5 = 55$

3. Из двух пунктов, расстояние между которыми 99 км, одновременно навстречу друг другу выехали два мотоциклиста. Второй ехал со скоростью на 6 км/ч больше скорости первого мотоциклиста. Определите скорость первого мотоциклиста, если их встреча произошла через 1 ч 6 мин после выезда обоих мотоциклистов.

Обозначив через x скорость первого мотоциклиста (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $2x + 6 = 99$ 2) $1{,}06(2x + 6) = 99$
3) $2x + 6 = 9{,}9$ 4) $1{,}1(x + x + 6) = 99$

4. Лодка проплыла 6 км по течению реки и 8 км против течения, затратив на весь путь 4 ч 45 мин. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 3 км/ч?

Обозначив через x собственную скорость лодки (в км/ч), выберите уравнение, соответствующее условию задачи.

1) $\frac{14}{x} = 4\frac{3}{4}$

2) $\frac{6}{x+3} - \frac{8}{x-3} = 4$

3) $\frac{8}{x+3} + \frac{6}{x-3} = 4{,}75$

4) $\frac{6}{x+3} + \frac{8}{x-3} = 4{,}75$

5. Некоторое расстояние автобус проходит за 4 ч, а автомобиль — за 3 ч. Чему равно это расстояние, если скорость автомобиля на 12 км/ч больше скорости автобуса?

Укажите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено искомое расстояние (в км).

1) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 12$ 2) $\frac{x}{4} - \frac{x}{3} = 12$

3) $4x - 3x = 12$ 4) $12\left(\frac{x}{3} - \frac{x}{4}\right) = 1$

6. В сквере посадили одинаковыми рядами 88 кустов пионов. Кустов в каждом ряду оказалось на 3 меньше, чем рядов. Сколько кустов пионов в каждом ряду?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество кустов пионов в каждом ряду.

1) $88 = x(x + 3)$ 2) $\frac{x}{88} = x - 3$

3) $88x = x - 3$ 4) $x^2 + 3x - 264 = 0$

7. Первая машинистка набирает 9 листов текста на компьютере за 40 мин, а вторая — 8 листов за это же время. Сколько минут потребуется им обеим, чтобы набрать 340 листов текста?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначено количество минут, необходимое для набора 340 листов.

1) $\frac{9}{x+40}+\frac{8}{x+40}=340$

2) $17(x-40)=340$

3) $\frac{40}{x+9}+\frac{40}{x+8}=340$

4) $\frac{340\cdot 40}{17}=x$

8. Расстояние между пристанями на реке 12 км. Катер проплыл от одной пристани до другой и вернулся обратно, затратив на весь путь 2 ч 30 мин. Какова скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость катера равна 10 км/ч?

Выберите уравнение, соответствующее условию задачи, если буквой x обозначена скорость течения реки (в км/ч).

1) $\frac{2{,}5}{10+x}+\frac{2{,}5}{10-x}=12$ 2) $x=\frac{2{,}5\cdot 12}{10}$

3) $\frac{12}{10+x}+\frac{12}{10-x}=\frac{5}{2}$ 4) $\frac{12}{2\cdot 2{,}5}=x$

Вариант № 5

1. Прочитайте задачу. «Вдоль аллеи расположены квадратные клумбы с цветами, как показано на рисунке. Длина аллеи равна 50 м, ширина — 14 м, общая площадь тротуарной плитки составляет 444 м^2. Чему равна сторона клумбы?»

Пусть x м — сторона клумбы (см. рис. 36). Какое уравнение соответствует условию задачи?

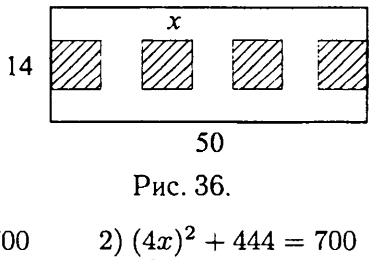


Рис. 36.

1) $4x^2+444=700$ 2) $(4x)^2+444=700$

3) $4x+444=700$ 4) $x^2+444=700$

2. После проведения контрольной работы учитель сказал: «Пятёрок на 4 меньше, чем троек; четвёрок в 5 раз больше, чем двоек, а двоек в 5,5 раза меньше, чем троек». Сколько учеников получили двойки, если всего в классе 30 учеников?

Пусть x — количество двоек, тогда можно составить уравнение:

1) $x + 5{,}5x + 5x + (x + 4) = 30$

2) $x + \dfrac{x}{5{,}5} + 5x + (x - 4) = 30$

3) $x + 5{,}5x + 5x + (5{,}5x + 4) = 30$

4) $x + 5{,}5x + 5x + (5{,}5x - 4) = 30$

3. Бабушка и внучка в течение $\frac{1}{2}$ часа слепили 120 пельменей. Сколько пельменей в минуту лепит бабушка, если она лепит в минуту на 2 пельменя больше внучки?

Пусть бабушка лепит x пельменей в минуту, тогда можно составить уравнение:

1) $x + (x - 2) = 120$ 2) $\frac{1}{2}(x + (x - 2)) = 120$

3) $(x + (x + 2)) \cdot 30 = 120$ 4) $(x + (x - 2)) \cdot 30 = 120$

4. Катер проплыл по течению реки 6 км и 8 км против течения, затратив на весь путь время, необходимое на прохождение 15 км по озеру. Определите собственную скорость катера, если скорость течения реки равна 2 км/ч.

Пусть v км/ч — собственная скорость катера, тогда можно составить уравнение:

1) $\dfrac{6}{v-2} + \dfrac{8}{v+2} = \dfrac{15}{v}$

2) $\dfrac{6}{v+2} + \dfrac{8}{v-2} = \dfrac{15}{v}$

3) $\dfrac{6}{v+2} + \dfrac{8}{v-2} = \dfrac{15}{2v}$

4) $6(v + 2) + 8(v - 2) = 15(v + 2)(v - 2)$

5. Из школы вышел ученик и пошёл домой со скоростью 3 км/ч, а через час по той же дороге в том же направлении на велосипеде выехал его брат со скоростью 16 км/ч. На каком расстоянии от школы братья встретятся?

Пусть братья встретятся на расстоянии x км от школы, тогда можно составить уравнение, соответствующее условию задачи:

1) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} + 1$

2) $\frac{x}{3} = \frac{x}{16} - 1$

3) $3x = 16x - 1$

4) $\frac{x}{3} + \frac{x}{16} = 1$

6. Мастер получил премию, равную 0,35 своего оклада, а его ученик — 0,25 своего оклада, причём премия мастера оказалась на 1500 рублей больше премии ученика. Какой оклад у ученика, если он на 2500 рублей меньше оклада мастера?

Обозначив за x рублей оклад ученика, можно составить уравнение:

1) $0{,}35(x + 2500) + 0{,}25x = 1500$

2) $0{,}35(x + 1500) - 0{,}25x = 2500$

3) $0{,}35(x + 2500) - 0{,}25x = 1500$

4) $0{,}35x - 0{,}25(x - 2500) = 1500$

7. На складе имеется несколько мешков с яблоками и несколько ящиков с грушами. Мешков на 10 больше, чем груш в одном ящике, ящиков на 5 меньше, чем яблок в одном мешке, а яблок в мешке на 7 меньше, чем всего мешков. Сколько груш в каждом ящике, если всего груш на 120 меньше, чем яблок?

Обозначив за x количество груш в одном ящике, можно составить уравнение:

1) $(x + 3)(x + 10) - x(x + 5) = 120$

2) $(x + 3)(x + 10) - x(x - 2) = 120$

3) $(x + 10)(x - 2) - x(x + 3) = 120$

4) $x(x + 10) - (x + 3)(x - 2) = 120$

8. Имеющийся у Винни-Пуха запас мёда он съест за 10 дней. Если он будет есть на две порции в день больше, то он опустошит свой запас за 8 дней. Запас из скольких порций имеется у Винни-Пуха?

Пусть x порций — запас Винни, тогда можно составить уравнение:

1) $10x = 8(x+2)$ 2) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+2} = 2$

3) $\frac{x}{10} - \frac{x}{8} = 2$ 4) $\frac{x}{10} = \frac{x}{8} - 2$

Вариант № 6

1. Объем параллелепипеда в 3 раза меньше объёма куба, а объём куба на 8 см^3 меньше объёма шара. Найдите объём шара (в см^3), если объём всех трёх фигур равен 15 см^3.

Ответ: ______

2. Саша прочитал книгу за 5 дней, а Илья эту же книгу прочитал за 7 дней. Сколько страниц в один день читал Илья, если Саша читал в один день на 12 страниц больше, чем Илья?

Обозначив за x число страниц, которые читал в один день Илья, можно составить уравнение:

1) $7(x+12) = 5x$ 2) $7x - 5x = 12$
3) $5x + 7x = 12$ 4) $7x = 5(x+12)$

3. Прочитайте задачу. «В корзине лежало 3 арбуза и 10 дынь. Известно, что арбуз весит на 4 кг больше дыни. Сколько весит арбуз и сколько весит дыня, если вся корзина весит 38 кг (без учёта веса самой корзины)?»

Пусть x кг — вес арбуза, y кг — вес дыни. Выберите систему уравнений, соответствующую условию задачи.

1) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3y + 10x = 38 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 4, \\ 3x + 10y = 38 \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = 4, \\ 3y + 10x = 38 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 3x + 10y = 38 \end{cases}$

4. Вася выше Пети на 10 см, а Петя ниже Коли в 1,2 раза. Какой рост у Васи (в см), если он ниже Коли на 18 см ?

Ответ: ______

5. Прочитайте условие задачи. «На земельном участке, который имеет форму прямоугольника с размерами 37 м и 27 м, вдоль двух коротких сторон и одной длинной выкладывают из тротуарной плитки три дорожки одинаковой ширины (см. рис. 37). Какова должна быть ширина дорожек, чтобы не покрытая плиткой земля участка имела площадь 860 м^2?»

Какое уравнение соответствует условию задачи, если x — ширина дорожек (в метрах)?

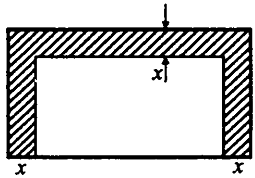


Рис. 37.

1) $37 \cdot 27 - 2 \cdot 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$

2) $37 \cdot 27 - 27 \cdot x - 37 \cdot x = 860$

3) $(37 - 2x)(27 - x) = 860$

4) $(37 - x) \cdot (27 - 2x) = 860$

6. Мастер за час делает на 5 деталей больше, чем ученик. После того, как ученик проработал 8 часов, а мастер — 10, они изготовили 410 деталей. Сколько деталей в час делает мастер и сколько ученик?

Ответ: ______

7. Расстояние между пунктами A и B по реке равно 2 км. На путь из A в B и обратно моторная лодка затратила $\frac{11}{30}$ часа. Какова собственная скорость лодки, если скорость течения реки равна 1 км/ч?

Обозначив собственную скорость лодки за x км/ч, можно составить уравнение:

1) $2(x-1) + 2(x+1) = \frac{11}{30}$ 2) $\frac{x+1}{2} + \frac{x-1}{2} = \frac{11}{30}$

3) $\frac{2}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{11}{30}$ 4) $\frac{2}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{11}{30}$

8. Трое рабочих выполняют некоторую работу. Если бы работали только первый и второй рабочие или только первый и третий рабочие, то работа была бы выполнена за три дня. Если бы работали только второй и третий рабочие, то работа была бы выполнена за шесть дней. За сколько дней рабочие выполнят всю работу, если будут трудиться втроём?

Ответ: ______

§ 14. Неравенства с одной переменной и системы неравенств

Основные сведения

Решением неравенства с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

Неравенства, множества решений которых совпадают, называются **равносильными**.

Областью определения неравенства с одной переменной называется множество значений переменной, при которых обе части неравенства имеют смысл.

Из данного неравенства получается равносильное ему неравенство, если

1) из одной части неравенства перенести в другую слагаемое с противоположным знаком;

2) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число;

3) обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный;

4) в какой-либо части неравенства или в обеих его частях выполнить тождественное преобразование, не меняющее области определения неравенства.

Решением системы неравенств с одной переменной называется значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы. Множеством решений системы является пересечение множеств решений неравенств, входящих в эту систему.

Демонстрационный вариант

1. Решите неравенство $3 - x \geqslant 3x + 5$.

   1) $(-\infty; -0{,}5]$ 2) $[-0{,}5; +\infty)$ 3) $(-\infty; -2]$ 4) $[-2; +\infty)$

   Решение. $3-x \geqslant 3x+5 \Leftrightarrow 3x+x \leqslant 3-5 \Leftrightarrow 4x \leqslant -2 \Leftrightarrow x \leqslant -0{,}5$. Из предложенных ответов верным является 1).

   Ответ: 1.

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 38). Расположите в порядке возрастания числа a; $\frac{1}{a}$; a^2.

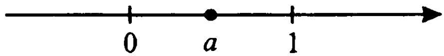


Рис. 38.

1) $\frac{1}{a}$; a; a^2 2) a^2; a; $\frac{1}{a}$ 3) $\frac{1}{a}$; a^2; a 4) a; $\frac{1}{a}$; a^2

Решение. Согласно рисунку $0 < a < 1$, отсюда $a^2 < a$ и $\frac{1}{a} > 1$. Значит, $a^2 < a < \frac{1}{a}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

3. Какое из приведённых ниже неравенств не следует из неравенства $x - y < z$?

1) $x - z - y < 0$ 2) $y > x - z$ 3) $y < z - x$ 4) $z + y > x$

Решение. Преобразуем каждое из перечисленных неравенств, перенося неизвестные x и y в левую часть неравенства, а z — в правую.

Неравенство 1: $x - z - y < 0 \Leftrightarrow x - y < z$.

Неравенство 2: $y > x - z \Leftrightarrow x - y < z$.

Неравенство 3: $y < z - x \Leftrightarrow x + y < z$. Не следует из исходного неравенства.

Неравенство 4: $z + y > x \Leftrightarrow x - y < z$.

Ответ: 3.

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0. \end{cases}$

1) $[-2; 5]$ 2) $[5; +\infty)$ 3) $[-2; 5)$ 4) $(5; +\infty)$

Решение.

$$\begin{cases} 3x + 6 \geqslant 0, \\ x - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geqslant -6, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant -2, \\ x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [-2; 5).$$

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

5. Решите неравенство $x^2 - 36 \leqslant 0$. В ответе укажите количество целочисленных решений.

1) 11 2) 13 3) 12 4) 15

Решение. $x^2 - 36 \leqslant 0 \Leftrightarrow (x-6)(x+6) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-6;6]$. В этот промежуток входит 13 целочисленных значений x. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. Укажите наименьшее целое число, принадлежащее множеству решений неравенства $\dfrac{x-3}{x+5} < 0$.

1) 3 2) −5 3) −4 4) 2

Решение. Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 39).
Нули числителя: $x - 3 = 0$, $x = 3$.
Нули знаменателя: $x + 5 = 0$, $x = -5$.

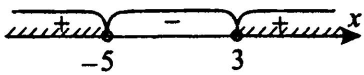


Рис. 39.

Следовательно, $x \in (-5;3)$. Наименьшим целым числом, принадлежащим множеству решений заданного неравенства, является −4. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений неравенства $-2 \leqslant \dfrac{3x-5}{4} \leqslant 6$.

1) $(-2;9)$ 2) $(-1;9]$ 3) $(-1;10)$ 4) $[-1;10]$

Решение.

$$-2 \leqslant \frac{3x-5}{4} \leqslant 6 \Leftrightarrow -8 \leqslant 3x-5 \leqslant 24 \Leftrightarrow -8+5 \leqslant 3x \leqslant 24+5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3 \leqslant 3x \leqslant 29 \Leftrightarrow -1 \leqslant x \leqslant \frac{29}{3}.$$

Следовательно, $x \in \left[-1; \dfrac{29}{3}\right]$. Так как $9 < \dfrac{29}{3} < 10$, то из указанных промежутков множество решений $\left[-1; \dfrac{29}{3}\right]$ принадлежит $[-1;10]$.

Ответ: 4.

8. Для каждой системы неравенств укажите множество её решений.

А) $\begin{cases} 2x+7>4x-8, \\ 10+4x>0; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} x^2-10x+9<0, \\ 6x-12>0; \end{cases}$ В) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+2>x, \\ \dfrac{2}{x}-6\geqslant 0 \end{cases}$

1) $(-\infty;0)\cup\left[\dfrac{1}{3};4\right)$ 2) $(-2{,}5;7{,}5)$ 3) $(2;9)$ 4) $\left(0;\dfrac{1}{3}\right]$

Решение. Найдём решение каждой из систем неравенств.

А) $\begin{cases} 2x+7>4x-8, \\ 10+4x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x<15, \\ 4x>-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7{,}5, \\ x>-2{,}5. \end{cases}$

Этому решению соответствует ответ 2).

Б) $\begin{cases} x^2-10x+9<0, \\ 6x-12>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-9)<0, \\ 6x>12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x<9, \\ x>2; \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ $2<x<9$. Этому решению соответствует ответ 3).

В) $\begin{cases} \dfrac{x}{4}+2>x, \\ \dfrac{2}{x}-6\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+8>4x, \\ \dfrac{2-6x}{x}\geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x<8, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-6x\geqslant 0, \\ x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2-6x\leqslant 0, \\ x<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x<\dfrac{8}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\leqslant\dfrac{1}{3}, \\ x>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant\dfrac{1}{3}, \\ x<0; \end{cases} \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{8}{3}, \\ x\leqslant\dfrac{1}{3}, \\ x>0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leqslant\dfrac{1}{3}, \\ x>0. \end{cases}$

Этому решению соответствует ответ 4).

Ответ:

А	Б	В
2	3	4

Вариант № 1

1. Решите неравенство $5-3x\leqslant 2x-20$.

1) $(5;+\infty)$ 2) $(-\infty;5]$ 3) $[5;+\infty)$ 4) $[-5;+\infty)$

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 40). Расположите в порядке возрастания числа $a+1$; $\frac{1}{a}$; a^2.

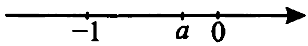


Рис. 40.

1) $a+1$; $\frac{1}{a}$; a^2 2) $\frac{1}{a}$; a^2; $a+1$ 3) $\frac{1}{a}$; $a+1$; a^2 4) a^2; $\frac{1}{a}$; $a+1$

3. Какое из приведённых ниже неравенств **не** следует из неравенства $a+b<d$?

1) $a<d-b$ 2) $d-b>a$ 3) $d-b-a>0$ 4) $d-a+b>0$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x+7 \geqslant 15, \\ 10-x>0. \end{cases}$

1) $[4;10)$ 2) $(4;10]$ 3) $(10;+\infty)$ 4) $(-10;4]$

5. Решите неравенство $49-x^2>0$. В ответе укажите количество целочисленных решений.

1) 6 2) 7 3) 13 4) 15

6. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства
$\frac{32-16x}{x-5} \geqslant 0$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

7. Укажите промежуток, которому принадлежит множество решений неравенства $2 \leqslant \frac{4x-8}{7} \leqslant 5$.

1) $(6;10)$ 2) $(5;11)$ 3) $(6;11]$ 4) $[6;10]$

8. Для каждой системы неравенств укажите множество ее решений.

А) $\begin{cases} 5(x+1) \leqslant 7(x+3)+1, \\ \frac{2x-1}{3} \leqslant \frac{x+1}{2}. \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 7-3x \geqslant 0, \\ 4x-20<0. \end{cases}$

В) $\begin{cases} \frac{x-5}{3} < \frac{3x-1}{2}, \\ \frac{x+3}{5} > \frac{x+2}{3}. \end{cases}$

1) $\left(-\infty; \frac{7}{3}\right]$ 2) $[-8{,}5; 5]$ 3) $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$ 4) $(-\infty;-1) \cup \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Решите неравенство $5x - 2 \geqslant 13$.

Ответ: ______

2. Известно, что число k принадлежит промежутку $(2;\ +\infty)$. На каком из рисунков (см. рис. 41) точки с координатами k, $2k$, k^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

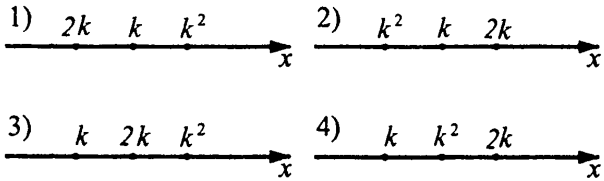


Рис. 41.

3. Какое из приведённых ниже неравенств является верным при всех значениях $q < -7$?

1) $q + 7 > 0$　　2) $7 - q < 0$

3) $7 - q > 10$　　4) $q + 7 < -7$

4. При каких значениях x значения выражения $3x - 2$ принадлежат промежутку $[-14; 4]$?

Ответ: ______

5. Решите неравенство $8x + 12 > 4 - 3(4 - x)$.

1) $x > -4$　　2) $x < -4$　　3) $x > -5{,}6$　　4) $x < -5{,}6$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} y < 3{,}2, \\ y < \dfrac{17}{21}, \\ y \leqslant -4. \end{cases}$

Ответ: ______

7. Укажите на рисунке 42 множество решений системы неравенств
$\begin{cases} 5x - 2 > 0, \\ 12 - 3x > 0. \end{cases}$

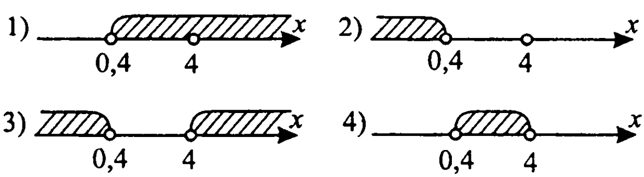


Рис. 42.

8. Какое из следующих чисел удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} 7x+13>0, \\ 12x-7\leqslant 0 \end{cases}$?

1) $-\frac{27}{12}$ 2) $-\frac{13}{6}$ 3) $\frac{13}{24}$ 4) $\frac{8}{13}$

Вариант № 3

1. Решите неравенство $0{,}9-0{,}1x\geqslant 0$.

Ответ: ______

2. Известно, что число m принадлежит промежутку $(0;1)$. На каком из рисунков (см. рис. 43) точки с координатами m, $2m$, m^2 расположены на координатной прямой в правильном порядке?

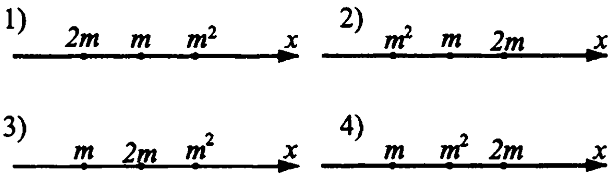


Рис. 43.

3. Известно, что $b>0{,}5$. Какое из неравенств верно?

1) $-6b+8<5$ 2) $-6b+8>5$
3) $6b+8<5$ 4) $-6b-8>5$

4. При каких значениях x значения выражения $8x-2$ принадлежат промежутку $[-10;14]$?

Ответ: ______

5. Решите неравенство $7-2x<-23-5(x-3)$.

1) $x>-5$ 2) $x<-5$ 3) $x>-15$ 4) $x<-15$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} x>8, \\ x\geqslant \frac{15}{17}, \\ x\geqslant -25. \end{cases}$

Ответ: ______

7. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 44?

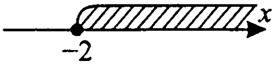


Рис. 44.

1) $\begin{cases} 3x + 7 > 1, \\ 5x + 16 \geqslant -4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1 - 4x \geqslant 9, \\ 11 - 2x \geqslant 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x + 16 \geqslant 4, \\ 2 - 7x \geqslant 16 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x + 13 \geqslant 3, \\ 9x - 2 \geqslant -20 \end{cases}$

8. Какое из следующих чисел удовлетворяет системе неравенств $\begin{cases} 4 - 5x \geqslant 0, \\ x + 13 > 0 \end{cases}$?

1) -25 2) -10 3) 1 4) 12

Вариант № 4

1. Решите неравенство $4 - 7x \geqslant 12 - 3x$.

1) $(-\infty; 2]$ 2) $[2; +\infty)$ 3) $[-2; +\infty)$ 4) $(-\infty; -2]$

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 45). Расположите в порядке убывания числа a^2; $a + 1$; $\frac{1}{a}$.

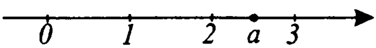


Рис. 45.

1) $a + 1$; a^2; $\frac{1}{a}$ 2) a^2; $a + 1$; $\frac{1}{a}$

3) $\frac{1}{a}$; $a + 1$; a^2 4) $\frac{1}{a}$; a^2; $a + 1$

3. Какое из приведённых ниже неравенств следует из неравенства $a + b > d$?

1) $a > b + d$ 2) $a + b + d > 0$ 3) $d - b + a < 0$ 4) $a + b - d > 0$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x - 1 \geqslant 8, \\ 16 - 2x > x + 4. \end{cases}$

1) нет решений 2) $[-3; 3)$ 3) $[3; 4)$ 4) $(-3; 3]$

5. Решите неравенство $x^2 - 9 \geqslant 0$.

1) $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ 2) $[-3; 3]$ 3) $(-\infty; 3]$ 4) $[-3; +\infty)$

6. Укажите количество целочисленных решений неравенства $x^2 - 3x - 10 \leqslant 0$.

1) ∞ 2) 7 3) 8 4) 10

7. Решите неравенство $\dfrac{2x - 1}{4x - 16} \leqslant 0$.

1) $\left[\dfrac{1}{2}; 4\right)$ 2) $\left(-\infty; \dfrac{1}{2}\right] \cup (4; +\infty)$ 3) $\left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$ 4) $(-\infty; 4]$

8. Решите неравенство $\dfrac{3}{x + 1} \geqslant 2$.

1) $[-1; +\infty)$ 2) $\left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$ 3) $(-\infty; 2]$ 4) $(-\infty; -1) \cup \left[\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

Вариант № 5

1. Решите неравенство $2x + 8 \geqslant -5(x - 3)$.

1) $(-\infty; 1]$ 2) $[1; +\infty)$ 3) $\left[-\dfrac{23}{7}; +\infty\right)$ 4) $\left[-\dfrac{23}{3}; +\infty\right)$

2. На координатной прямой отмечено число a (см. рис. 46). Расположите в порядке убывания числа $\dfrac{1}{a}$; $a^2 - a$; $1 - a$.

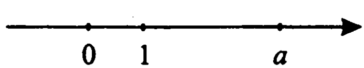


Рис. 46.

1) $1 - a; \dfrac{1}{a}; a^2 - a$ 2) $\dfrac{1}{a}; a^2 - a; 1 - a$

3) $a^2 - a; 1 - a; \dfrac{1}{a}$ 4) $a^2 - a; \dfrac{1}{a}; 1 - a$

3. Какое из неравенств не следует из неравенства $a + b - 1 \geqslant c$?

1) $c + 1 \leqslant a + b$ 2) $b - c \geqslant 1 - a$

3) $a - c + 1 \geqslant -b$ 4) $1 - b \geqslant a - c$

4. Решите систему неравенств $\begin{cases} 15x - 4 \geqslant 2x + 5, \\ 4 - x \leqslant 3. \end{cases}$

1) $[1; +\infty)$ 2) $\left[\dfrac{9}{13}; +\infty\right)$ 3) $\left[\dfrac{9}{13}; 1\right]$ 4) нет решений

5. Используя рисунок 47, укажите, какое из следующих неравенств не является верным.

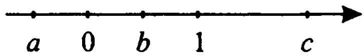


Рис. 47.

1) $a + b + c > 0$ 2) $c - a - b < 0$ 3) $2a + b < 0$ 4) $c - 1 > 0$

6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $5x + 4 > 2x - 5$, удовлетворяющих условию $4x - 2 \leqslant 3$.

1) 5 2) 2 3) 3 4) 4

7. Укажите промежуток, содержащий множество решений неравенства $-3 < \dfrac{3x + 2}{4} \leqslant 1$.

1) $\left(-\dfrac{14}{3}; \dfrac{2}{3}\right]$ 2) $(-1; 0{,}5)$ 3) $(-6{,}5; 1)$ 4) $\left(-\infty; \dfrac{2}{3}\right)$

8. Для каждой системы неравенств укажите тип промежутка, являющегося её решением.

А) $\begin{cases} 4x - 5 > 1, \\ 3x + 1 < 0; \end{cases}$ Б) $\begin{cases} 3 - x \geqslant 2, \\ 2x - 4 \leqslant 3; \end{cases}$ В) $\begin{cases} x > -1, \\ 3(3x - 8) + 5 < -4. \end{cases}$

1) интервал 2) отрезок 3) луч 4) решений нет

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Известно, что $x > 1$. Сравните числа x и $\dfrac{1}{x}$.

Ответ: ______

2. Решите неравенство $3(x + 3) < -2(x - 5)$.

Ответ: ______

3. Известно, что $g < -3$. Какое из неравенств верно?

1) $0{,}5g - 0{,}6 < -2{,}1$ 2) $0{,}5g + 0{,}6 < -2{,}1$
3) $-0{,}5g - 0{,}6 < -2{,}1$ 4) $0{,}5g - 0{,}6 > -2{,}1$

4. Решите неравенство $3x + 1 \geqslant 2(x - 1) + 6x$.

Ответ: ______

5. Какое из перечисленных ниже множеств является решением неравенства $\frac{1}{2-x} < 3$?

1) $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right) \cup \left(2; +\infty\right)$ 2) $\left(\frac{5}{3}; 2\right)$
3) $\left(-\infty; \frac{5}{3}\right)$ 4) $\left(\frac{5}{3}; 2\right) \cup \left(2; +\infty\right)$

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3 - 4x \leqslant 19, \\ 1 - 2x > 0. \end{cases}$

Ответ: ______

7. Множество решений какой системы неравенств показано на рисунке 48?

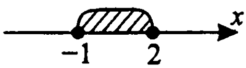


Рис. 48.

1) $\begin{cases} 7x - 13 \leqslant 1, \\ 5 - 4x \leqslant 9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5 \leqslant 2, \\ 7 - 2x \leqslant 3 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x - 5 \geqslant 3, \\ 2x + 8 \geqslant 6 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + 17 \leqslant 4, \\ 5x - 6 \leqslant 4 \end{cases}$

8. Найдите наибольшее целочисленное решение системы неравенств
$\begin{cases} \frac{x}{x-1} \geqslant 1, \\ 21 - 2x \geqslant 17. \end{cases}$

1) 1 2) 2 3) 7 4) 0

§ 15. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Основные сведения

Квадратным неравенством с одной переменной x называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — действительные числа, $a \neq 0$.

Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком (не меняя при этом знака неравенства).

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное **при всех значениях** x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное **при всех значениях** x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Квадратный трёхчлен $ax^2 + bx + c$ с отрицательным дискриминантом при всех значениях x имеет знак старшего коэффициента a.

Модуль вещественного аргумента $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geqslant 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Основные свойства модуля.

$|a| \geqslant 0$

$|a| = |-a|$ $\qquad$ $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

$|ab| = |a| \cdot |b|$ $\qquad$ $|a+b| \leqslant |a| + |b|$

$|a|^2 = a^2$ $\qquad$ $|a-b| \geqslant |a| - |b|$

Решением неравенства $|x| < b$ являются значения x, удовлетворяющие неравенству $-b < x < b$.

Решением неравенства $|x| > b$ являются значения x, удовлетворяющие совокупности неравенств $\left[\begin{array}{l} x < -b, \\ x > b. \end{array}\right.$

Некоторые **методы решения** уравнений и неравенств, содержащих модуль:

1) **Общий метод**. Разобьём числовую ось точками, в которых обращаются в ноль выражения, стоящие под знаком модуля. Решаем неравенства на каждом из полученных промежутков.

2) **Метод возведения в квадрат**. $|f(x)| = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$

3) **Метод замены.** $af^2(x)+b|f(x)|+c > 0 \Leftrightarrow a|f(x)|^2+b|f(x)|+c > 0$. Замена: $t = |f(x)|, t \geqslant 0, \Leftrightarrow at^2 + bt + c > 0$.

Демонстрационный вариант

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + x - 6 < 0$?

Решение. $x^2 + x - 6 < 0$. Решим неравенство методом интервалов (см. рис. 49).

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$

$(x+3)(x-2) < 0$

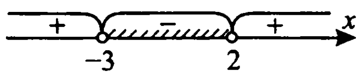


Рис. 49.

Следовательно, $x \in (-3; 2)$.

Ответ: $(-3; 2)$.

2. Решите неравенство $|x + 3| \geqslant 2$.

1) $(-\infty; -5] \cup [-1; +\infty)$ 2) $[-1; 5]$

3) $[-5; -1]$ 4) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$

Решение. $|x + 3| \geqslant 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3 \geqslant 2, \\ x+3 \leqslant -2; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant -1, \\ x \leqslant -5 \end{array}\right.$

(см. «Основные сведения» к параграфу).

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

3. При каком наименьшем натуральном значении x значение квадратного трёхчлена $-4x^2 + x + 1$ меньше соответствующих значений двучлена $2 - 4x$?

Решение. Задача сводится к нахождению наименьшего натурального x, удовлетворяющего неравенству $-4x^2 + x + 1 < 2 - 4x \Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 1 > 0$. Решим неравенство методом интервалов.

11. Зак. № 199

$$4x^2 - 5x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Неравенство примет вид $4\left(x - \frac{1}{4}\right)\left(x - 1\right) > 0$. Отметим на числовой оси значения $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$ (см. рис. 50) и выберем соответствующие решения.

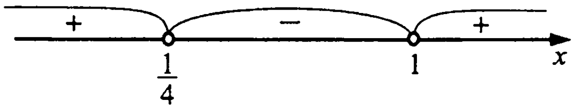


Рис. 50.

Согласно рисунку находим $x \in \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup (1; \infty)$. Следовательно, наименьшим натуральным x, удовлетворяющим условию задачи, является 2.

Ответ: 2.

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства
$\dfrac{x^2 - 15x + 50}{x^2 + 3x + 7} \leqslant 0.$

Решение. Разложим числитель и знаменатель дроби (если это возможно) на линейные множители.

$x^2 - 15x + 50 = 0$, $x_1 = 5$ и $x_2 = 10$ — корни уравнения.

$x^2 + 3x + 7 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 7 < 0$, действительных корней нет. Учитывая, что старший коэффициент уравнения $a = 1$, $a > 0$, имеем $x^2 + 3x + 7 > 0$ при любом значении x.

Исходное неравенство равносильно неравенству $(x - 5)(x - 10) \leqslant 0$.

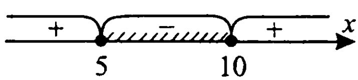


Рис. 51.

Получаем $5 \leqslant x \leqslant 10$. Промежуток $[5; 10]$ содержит 6 целых чисел, значит, неравенство имеет 6 целочисленных решений.

Ответ: 6.

5. Решите неравенство $|2x - 4| < 6$.

Решение. Данное неравенство равносильно двойному неравенству $-6 < 2x - 4 < 6 \Leftrightarrow -6 + 4 < 2x < 6 + 4 \Leftrightarrow -2 < 2x < 10 \Leftrightarrow -1 < x < 5$.

Ответ: $(-1; 5)$.

6. Решите неравенство $\dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 1$.

Решение. $\dfrac{x-7}{x+3} \geqslant 1 \Leftrightarrow \dfrac{x-7}{x+3} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-7-x-3}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{10}{x+3} \leqslant 0 \Leftrightarrow x < -3.$

Ответ: $(-\infty; -3)$.

7. На рисунке 52 изображены графики функций $y = 2 - |x|$ и $y = |x| - 3$.

Используя рисунок, решите систему неравенств $\begin{cases} 2 - |x| > 0, \\ |x| - 3 < 0. \end{cases}$

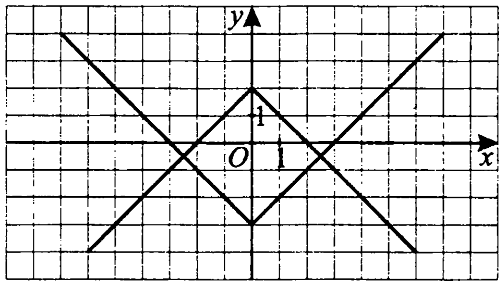


Рис. 52.

1) $(-2{,}5; 2{,}5)$ 2) $(-2; 2)$ 3) $(-3; -2) \cup (2; 3)$ 4) $(-3; 3)$

Решение. По рисунку находим множество решений каждого неравенства.

1) $2 - |x| > 0$, $x \in (-2; 2)$.

2) $|x| - 3 < 0$, $x \in (-3; 3)$.

Решением системы будут те значения переменной, которые удовлетворяют каждому неравенству.

Следовательно, $x \in (-2; 2)$. Из предложенных вариантов ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1. \end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases} \left|\dfrac{x+3}{2x-3}\right| > 1, \\ \dfrac{x+3}{2} - \dfrac{x+4}{3} \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3}{2x-3} < -1, \\ \dfrac{x+3}{2x-3} > 1, \end{array} \right. \\ 3(x+3) - 2(x+4) \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+3+2x-3}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{x+3-2x+3}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ 3x+9-2x-8 \geqslant 6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{3x}{2x-3} < 0, \\ \dfrac{6-x}{2x-3} > 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{x}{x-1{,}5} < 0, \\ \dfrac{x-6}{x-1{,}5} < 0, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 0 < x < 1{,}5, \\ 1{,}5 < x < 6, \end{array} \right. \\ x \geqslant 5; \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leqslant x < 6.$$

Ответ: $[5; 6)$.

Вариант № 1

1. При каких значениях x верно неравенство $x^2 + 4x - 21 < 0$?
   Ответ: ______

2. Решите неравенство $|2x - 3| > 1$.
   1) $x < 1$ 2) $x > 2$ 3) $x < 1, x > 2$ 4) $1 < x < 2$

3. Найдите наибольшее решение неравенства $\dfrac{x+10}{x-25} \leqslant 0$, являющееся целым нечётным числом.
   1) 23   2) 25   3) -9 4) 7

4. Решите неравенство $\dfrac{2}{2x+3} \geqslant 1$.
   1) $(-\infty; -3) \cup [-1; +\infty)$ 2) $\left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left[-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$
   3) $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right]$ 4) $(-3; -1]$

5. Решите неравенство $|x - 2| \leqslant 5$.

Ответ: ______

6. Решите неравенство $\dfrac{2x-1}{x+4} \geqslant 5$.

Ответ: ______

7. На каком рисунке (см. рис. 53) показано множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + 13 \leqslant 15, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant 1? \end{cases}$

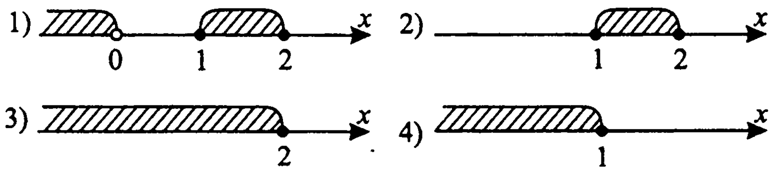


Рис. 53.

8. Решите неравенство $|x + 1| + |x - 1| \leqslant 2$.

Ответ: ______

Вариант № 2

1. Решите неравенство $(x - 7)(x + 7) < -40$.

1) $-7 < x < 7$ 2) $x > 7$ 3) $x < -3, x > 3$ 4) $-3 < x < 3$

2. На рисунке 54 изображён график функции $y = -x^2 + 2x + 6$. Используя рисунок, решите неравенство $x^2 - 2x < 3$.

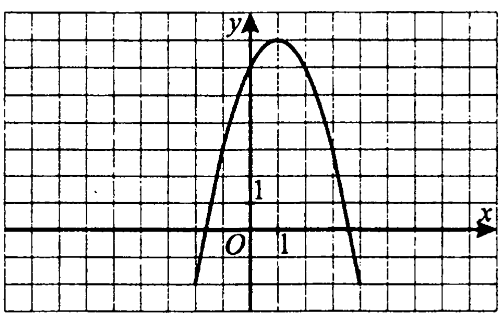


Рис. 54.

Ответ: ______

3. На каком из рисунков (см. рис. 55) изображено множество решений неравенства $4 - x^2 \geqslant 0$?

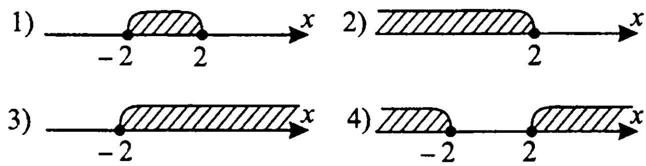


Рис. 55.

4. Решите неравенство $|2x - 3| < 5$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$
3) $-1 < x < 4$ 4) $x < -1, x > 4$

5. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{y-1}{8} - \dfrac{6y+1}{4} < 1, \\ \left|\dfrac{y+5}{y-1}\right| > 1. \end{cases}$

Ответ: ______

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{6-x}{x+3} \geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x} \leqslant -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: ______

7. На каком из рисунков (см. рис. 56) изображено множество решений системы неравенств $\begin{cases} x + 1 \leqslant -2, \\ 2x + 1 < -7 \end{cases}$?

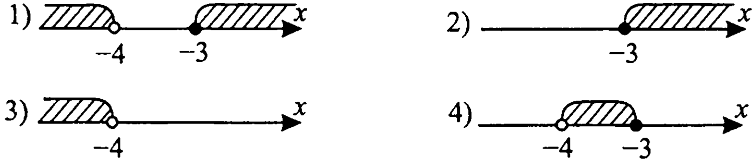


Рис. 56.

Ответ: ______

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x + 5 \geqslant x - 1, \\ 2x + 1 > 4x + 3. \end{cases}$

Ответ: ______

Вариант № 3

1. Решите неравенство $(2-x)(x+3) \geqslant 0$.

Ответ: ______

2. На рисунке 57 изображён график функции $y = -x^2 - 4x$. Используя график, решите неравенство $x^2 + 4x < 0$.

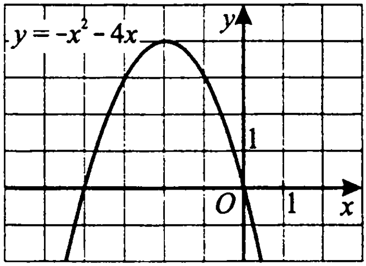


Рис. 57.

Ответ: ______

3. При каких натуральных значениях n значения квадратного трёхчлена $3n^2 - 10n + 2$ меньше соответствующих значений двучлена $2 - 4n$?

Ответ: ______

4. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$\dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 - 7x + 10} < 0.$

Ответ: ______

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = -x^2 + 36$, принимает отрицательные значения?

Ответ: ______

6. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2x - 5 < x + 1, \\ 2x - 5 \geqslant 1 - x. \end{cases}$

1) нет решений 2) $(-\infty; 6)$ 3) $[2; 6)$ 4) $[2; +\infty)$

7. Решите неравенство $\dfrac{2x^2 - 8}{3 - |x+2|} \geqslant 0.$

1) решений нет 2) $(-\infty; -2) \cup [2; +\infty)$
3) $[-5; 1)$ 4) $(-5; -2] \cup (1; 2]$

8. Постройте график функции $y = \dfrac{5 - 2x}{3}$. При каких значениях функции выполняется неравенство $2 < x \leqslant 3\frac{2}{3}$?

Ответ: ______

Вариант № 4

1. Решите неравенство $3x^2 - 7x + 2 > 0$.

1) решений нет 2) $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (2; +\infty)$ 3) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$ 4) $(-\infty; 2)$

2. Найдите наибольшее целочисленное решение неравенства $x^2 - |x| - 2 < 0$.

Ответ: ______

3. Решите неравенство $\dfrac{x(2x+1)}{(x+1)(x-2)} \leqslant 0$.

1) $(-\infty; -1) \cup \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup (2; +\infty)$ 2) $(-\infty; 0] \cup (2; +\infty)$

3) $[-2; -1) \cup [-\frac{1}{2}; 2)$ 4) $(-1; -\frac{1}{2}] \cup [0; 2)$

4. Из чисел -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1 выберите все те, при которых значения выражения $13x + 7$ не меньше значений выражения $9x - 5$.

Ответ: ______

5. При каких значениях x функция, заданная формулой $y = x^2 - 5x + 6$, принимает неотрицательные значения?

Ответ: ______

6. Решите неравенство $\dfrac{x-5}{x+7} < 1$.

Ответ: ______

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} 5x + 1 \geqslant 3x - 5, \\ x^2 + 3x < 4. \end{cases}$

1) решений нет 2) $[-3; 1)$ 3) $(-\infty; -4)$ 4) $(1; +\infty)$

8. Решите неравенство $|x - 3| + |2x + 1| \leqslant 14$.

Ответ: ______

Вариант № 5

1. Решите неравенство $(1 - x)(x + 4) > 0$.

Ответ: ______

2. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{20 - 5x}{x^2 - 9} \geqslant 0$.

Ответ: ______

3. Найдите все натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $\dfrac{3x-12}{x^2-4} \leqslant 0$.

Ответ: ______

4. Найдите наименьшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{2x^2-3x-2}{25-x^2} \geqslant 0$.

Ответ: ______

5. Решите неравенство $|2x+3| \geqslant 7$.

Ответ: ______

6. Дана функция $f(x) = x^2 - 5x - 6$. Решите неравенство $f(|x-2|) \leqslant 0$.

Ответ: ______

7. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{7-x}{x+2} \geqslant 0, \\ |x| - |x-3| \leqslant 0. \end{cases}$

1) $(-2; 1{,}5]$ 2) $(2; +\infty)$ 3) $[1{,}5; 7]$ 4) $(1; +\infty)$

8. Решите систему неравенств $\begin{cases} \dfrac{8-x}{x+5} \geqslant 0, \\ |x-5| - |x| \geqslant 0. \end{cases}$

Ответ: ______

Вариант № 6

1. Даны две последовательности $a_n = 13 + n - n^2$ и $c_n = -\frac{1}{2}(n+1)$, $n \in N$. При каких n выполняется $a_n > c_n$?

Ответ: ______

2. Укажите наибольшее целочисленное решение неравенства $x^2 - 5|x| + 6 \leqslant 0$.

Ответ: ______

3. На каком из рисунков (см. рис. 58) изображено множество решений неравенства $\dfrac{2-x}{2} \leqslant \dfrac{x-2}{3} + 2$?

Ответ: ______

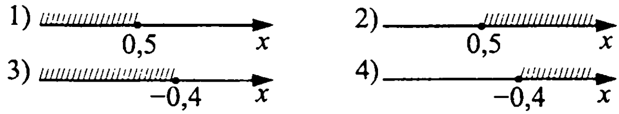


Рис. 58.

4. Из чисел -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5 выберите все те, при которых значения выражения $2x^2 - 3x - 5$ меньше значений выражения $x^2 - 1$. В ответе запишите их сумму.

Ответ: ______

5. Решите неравенство $|2x - 5| > 3$.

1) $1 < x < 4$ 2) $x < 1, x > 4$ 3) $x < 1$ 4) $x > 4$

6. Постройте график функции $y = 2{,}5 - 0{,}5x^2$. При каких неотрицательных значениях аргумента выполняется неравенство $0 \leqslant y \leqslant 2{,}5$?

Ответ: ______

7. Укажите на рисунке 59 множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} 4x - 5 > 0, \\ 24 - 6x > 0. \end{cases}$$

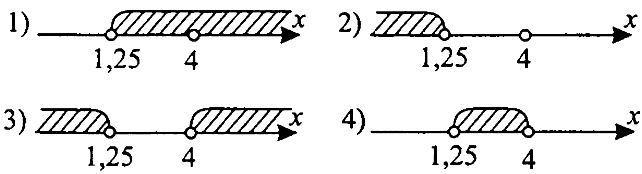


Рис. 59.

8. Решите неравенство $|3x + 5| - |x - 4| \leqslant 1$.

Ответ: ______

§ 16. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Основные сведения

Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, сложенному с одним и тем же числом. Это число называют **разностью арифметической прогрессии** и обычно обозначают буквой **d**.

1. Если a_n есть n-й член, d — разность и S_n — сумма n первых членов арифметической прогрессии, то

$$d = a_{n+1} - a_n, \qquad a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \text{ или } S_n = \frac{\big(2a_1 + d(n-1)\big)n}{2}.$$

Арифметическая прогрессия возрастает, если $d > 0$, и убывает, если $d < 0$.

2. Если a_k, a_l, a_m, a_n — члены арифметической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

3. Каждый член арифметической прогрессии, отличный от первого и последнего, равен среднему арифметическому соседних с ним членов:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число. Это число называют **знаменателем геометрической прогрессии** и обычно обозначают буквой **q**.

1. Если b_n есть n-й член, q — знаменатель и S_n — сумма n первых членов геометрической прогрессии, то

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}, \qquad b_n = b_1 q^{n-1},$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}, q \neq 1.$$

2. Если b_k, b_l, b_m, b_n — члены геометрической прогрессии с такими номерами, что $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

3. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии, отличного от первого и последнего, равен произведению соседних с ним членов:

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}.$$

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Если S есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($|q| < 1$), то $S = \dfrac{b_1}{1-q}$.

Демонстрационный вариант

1. Из чисел -3, 6, 21, 0 выберите число, которое **не** является членом последовательности $b_n = n^2 - 4$.

1) -3 2) 6 3) 21 4) 0

Решение. Исследуем каждое из предложенных чисел.

1) Пусть $b_n = -3$, тогда $-3 = n^2 - 4$, $n^2 = 1$, $n = \pm 1$, $n \in N$. Значит, $n = 1$. Следовательно, $b_n = -3$ является членом заданной последовательности.

2) Пусть $b_n = 6$, тогда $6 = n^2 - 4$, $n^2 = 10$, $n = \pm\sqrt{10}$, $n \notin N$. Следовательно, $b_n = 6$ не является членом заданной последовательности.

3) Пусть $b_n = 21$, тогда $21 = n^2 - 4$, $n^2 = 25$, $n = \pm 5$, $n \in N$. Значит, $n = 5$. Следовательно, $b_n = 21$ является членом заданной последовательности.

4) Пусть $b_n = 0$, тогда $0 = n^2 - 4$, $n^2 = 4$, $n = \pm 2$, $n \in N$. Значит, $n = 2$. Следовательно, $b_n = 0$ является членом заданной последовательности.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

2. Найдите пятый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n - 3$ и условием $a_1 = 2$.

1) 2 2) -5 3) 22 4) -13

Решение. Найдём пятый член последовательным нахождением a_2, a_3, a_4, a_5. $a_2 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$, $a_3 = 2 \cdot 1 - 3 = -1$, $a_4 = 2 \cdot (-1) - 3 = -5$, $a_5 = 2 \cdot (-5) - 3 = -13$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{12} > 0$.

1) $a_n = -3n$ 2) $a_n = -2n + 24$
3) $a_n = n - 15$ 4) $a_n = 2n - 10$

Решение. По формуле n-го члена для каждой из заданных прогрессий сравним значение a_{12} с нулём.

1) $a_n = -3n$, $a_{12} = -3 \cdot 12 = -36 < 0$.

2) $a_n = -2n + 24$, $a_{12} = -2 \cdot 12 + 24 = 0$.

3) $a_n = n - 15$, $a_{12} = 12 - 15 = -3 < 0$.

4) $a_n = 2n - 10$, $a_{12} = 2 \cdot 12 - 10 = 14 > 0$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: $3;\ 1;\ \frac{1}{3};\ldots$

1) 3 2) 2 3) -2 4) $\frac{1}{3}$

Решение. Знаменатель геометрической прогрессии $q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{1}{3}$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Укажите число неотрицательных членов арифметической прогрессии: $13;\ 10;\ 7;\ldots$

1) 5 2) 6 3) 4 4) 10

Решение. Разность заданной прогрессии $d = a_2 - a_1 = 10 - 13 = -3$. Следовательно, $a_4 = a_3 + d = 7 - 3 = 4$, $a_5 = a_4 + d = 4 - 3 = 1$, $a_6 = a_5 + d = 1 - 3 = -2 < 0$. Очевидно, все последующие члены прогрессии являются отрицательными. Значит, заданная прогрессия содержит 5 неотрицательных членов.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии: $\frac{1}{6};\ \frac{1}{3};\ x;\ \frac{4}{3};\ldots$

1) $\frac{1}{9}$ 2) $\frac{2}{3}$ 3) 1 4) $\frac{1}{2}$

Решение. Неизвестный член заданной геометрической прогрессии найдём по свойству прогрессии:

$b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}$. Получаем $x = \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{2}{3}$.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Найдите сумму первых пяти членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 5,\ d = -2$.

1) -20 2) 15 3) 10 4) 5

Решение. Сумму первых пяти членов заданной арифметической прогрессии найдём по формуле $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

Получаем $S_5 = \frac{2 \cdot 5 - 2(5-1)}{2} \cdot 5 = 5$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

8. Каждой из последовательностей

А) $3; 5; 7;$ Б) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9};$ В) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$

поставьте в соответствие формулу n-ого члена.

1) $a_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ 2) $a_n = 2n + 1$ 3) $a_n = n^2$ 4) $a_n = \frac{1}{n^2}$

Решение. Рассмотрим каждую из заданных последовательностей.

А) $3; 5; 7$ — последовательность нечётных чисел, $a_n = 2n + 1$. Этой последовательности соответствует ответ 2).

Б) Последовательность $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}$ можно записать в виде: $1; \frac{1}{2^2}; \frac{1}{3^2}$.

Значит, $a_n = \frac{1}{n^2}$. Этой последовательности соответствует ответ 4).

В) $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}$ — геометрическая прогрессия со знаменателем $q = \frac{1}{2}$.

Значит $a_n = 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Этой последовательности соответствует ответ 1).

Ответ:

А	Б	В
2	4	1

Вариант № 1

1. Какое из чисел является членом последовательности $a_n = n^2+2n-1$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Найдите рекуррентную формулу для последовательности чисел $3; 1; -1; -3; \ldots$

1) $a_{n+1} = a_n + 2$ 2) $a_{n+1} = a_n - 2$

3) $a_{n+1} = -2a_n$ 4) $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$

3. Из арифметических прогрессий, заданных формулой n-го члена, выберите ту, для которой выполняется условие $a_{15} < 0$.

1) $a_n = 5n$ 2) $a_n = -2n + 50$
3) $a_n = 3n - 48$ 4) $a_n = -3n + 45$

4. Найдите разность арифметической прогрессии, заданной формулой $a_n = 3n - 4$.

1) -4 2) -1 3) 3 4) 4

5. Укажите число членов арифметической прогрессии $4, 7, 10, \ldots$, удовлетворяющих условию $a_n \leqslant 48$.

1) 14 2) 15 3) 16 4) 17

6. b_n — геометрическая прогрессия, и известно, что $b_3 = x$, $b_{3+k} = \frac{15}{16}$, $b_{3+2k} = 3{,}75$. Найдите x.

1) 15 2) $\frac{15}{8}$ 3) $\frac{5}{64}$ 4) $\frac{15}{64}$

7. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии, если $b_1 = \frac{1}{4}$, $q = 2$.

1) $\frac{127}{4}$ 2) $\frac{63}{4}$ 3) 63 4) 127

8. Каждой из последовательностей поставьте в соответствие формулу n -го члена.

А) $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \ldots$ Б) $8; 13; 18; \ldots$ В) $5; 17; 65; \ldots$

1) $a_n = 2n - 12^n$ 2) $a_n = 5n + 3$
3) $a_n = 1 - 2^{-n}$ 4) $a_n = 2^{2n} + 1$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 2

1. Числовая последовательность задана формулой n-го члена: $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^2 + n + 3}$. Из чисел -3; $\dfrac{2}{9}$; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{4}{5}$ выберите то, которое является членом этой последовательности.

1) -3 2) $\dfrac{2}{9}$ 3) $\dfrac{1}{3}$ 4) $\dfrac{4}{5}$

2. Числовая последовательность задана следующими условиями: $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 3a_n - 2$. Найдите пятый член этой последовательности.

1) 64 2) 71 3) 81 4) 82

3. Выберите арифметическую прогрессию из нижеперечисленных последовательностей.

1) $3; -1; -3; -6; \ldots$ 2) $1; 4; 8; 11; \ldots$
3) $-1; -3; -6; -8; \ldots$ 4) $2; 6; 10; 14; \ldots$

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: $\dfrac{1}{2}$; -1; 2; -4.

1) -3 2) 3 3) -2 4) 2

5. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии:
$\ldots; \dfrac{1}{8}; -\dfrac{1}{4}; x; -1; \ldots$

1) $-0{,}5$ 2) 2 3) $-0{,}25$ 4) 0,5

6. Найдите количество отрицательных членов арифметической прогрессии: -44; -42; -40; ...

1) 16 2) 22 3) 21 4) 17

7. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 7$; $d = 4$.

1) 207 2) 214 3) 256 4) 281

8. Каждой из последовательностей
А) $6; 3; 0; \ldots$ Б) $6; 10; 14; \ldots$ В) $6; 12; 24; \ldots$
поставьте в соответствие формулу n-го члена.

1) $a_n = 9 - 3n$ 2) $a_n = 6n$ 3) $a_n = 2 + 4n$ 4) $a_n = \dfrac{3}{2^{-n}}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 3

1. Из чисел -3, -2, 1, 7 выберите то, которое является членом последовательности, заданной формулой $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 7}{7}$.

1) 1 2) -2 3) -3 4) 7

2. Найдите четвёртый член последовательности, заданной рекуррентной формулой $a_{n+1} = 2a_n + 1$ и условием $a_1 = 3$.

1) 7 2) 15 3) 31 4) 63

3. Выберите арифметическую прогрессию из нижеперечисленных последовательностей.

1) 2; 7; 11; 16; ... 2) 5; 8; 11; 13; ...
3) 7; 9; 10; 12; ... 4) 10; 20; 30; 40; ...

4. Найдите знаменатель геометрической прогрессии: 4; -2; 1 ; $-\frac{1}{2}$.

1) 2 2) $-\frac{1}{2}$ 3) -2 4) $\frac{1}{2}$

5. Укажите число неотрицательных членов арифметической прогрессии: 40; 36; 32; ...

1) 8 2) 9 3) 10 4) 11

6. Найдите неизвестный член геометрической прогрессии
...; $\frac{1}{7}$; x; $\frac{16}{7}$; ..., если $\frac{1}{7}$; x; $\frac{16}{7}$ — последовательные члены и $x > 0$.

1) 1 2) $\frac{4}{7}$ 3) $\frac{8}{7}$ 4) другой ответ

7. Найдите сумму первых шести членов арифметической прогрессии, если $a_1 = 12$, $d = 3$.

1) 117 2) 81 3) 78 4) 39

8. Каждой из последовательностей
А) 6; 12; 24; ... Б) 8; 6; 4; ... В) 2; 8; 18; ...
поставьте в соответствие формулу n-го члена.

1) $a_n = 10 - 2n$ 2) $a_n = 2n^2$ 3) $a_n = 2n + 6$ 4) $a_n = \dfrac{3}{2^{-n}}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Числа 1, 7, 13 являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Какое из следующих чисел также является членом этой прогрессии?

1) 74 2) 107 3) 96 4) 85

2. Какое число является членом арифметической прогрессии $3;\ 7;\ 11;\ 15;\ldots$?

1) 41 2) 46 3) 58 4) 63

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $1; 0; -1; 0; \ldots$ 2) $1; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \ldots$

3) $1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; \ldots$ 4) $1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -1; \ldots$

4. Найдите сумму трёх первых членов геометрической прогрессии, если $b_1 = 4$, $q = -2$.

Ответ: ______

5. Геометрическая прогрессия (b_n) задана условиями $b_1 = 4$, $b_{n+1} = b_n \cdot \frac{1}{4}$. Укажите формулу n-го члена этой прогрессии.

1) $b_n = \frac{1}{4^n}$ 2) $b_n = \frac{1}{4^{n-1}}$ 3) $b_n = \frac{1}{4^{n-2}}$ 4) $b_n = \frac{1}{4^{n-3}}$

6. Сумма четырнадцатого и пятого членов арифметической прогрессии равна 25. Найдите сумму первых восемнадцати членов этой прогрессии.

Ответ: ______

7. В геометрической прогрессии $b_1 = -\frac{1}{15}$, $q = -1{,}5$. В каком случае при сравнении членов этой прогрессии знак неравенства поставлен неверно?

1) $b_3 < b_4$ 2) $b_4 > b_5$ 3) $b_4 < b_6$ 4) $b_8 > b_{10}$

8. На первой неделе нового учебного года ученик решил 11 задач, а на каждой следующей неделе он решал на 3 задачи больше, чем на предыдущей. Сколько задач решил ученик на n-й неделе нового учебного года?

Ответ: ______

Вариант № 5

1. Чему равна разность арифметической прогрессии, если её первый член равен 3, а пятый — 27?

1) 8　　2) 5　　3) 10　　4) 6

2. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии $3; 6; 12; \ldots$

1) 412　　2) 295　　3) 381　　4) 372

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — арифметическая прогрессия. Укажите её.

1) $2; 3; 5; 6; \ldots$　　2) $-2; -4; -8; -12; \ldots$
3) $4; 1; -2; -5; \ldots$　　4) $1; 2; 4; 8; \ldots$

4. Выписано несколько последовательных членов арифметической прогрессии: $\ldots; 15; x; 1; -6; \ldots$. Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

1) 7　　2) 8　　3) 9　　4) 10

5. Геометрическая прогрессия задана условиями $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 2b_n$. Какое из данных чисел является членом этой прогрессии?

1) 1　　2) 36　　3) 32　　4) 24

6. В геометрической прогрессии $b_5 \cdot b_{20} = 13$. Найдите $b_3 \cdot b_{22}$.

Ответ: ______

7. Числа $2a, 3b, 4c$ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Найдите число b, если $a = 4$, $c = 7$.

Ответ: ______

8. В искусственный водоём внесли 10 кг одноклеточных водорослей. Определите, через сколько дней масса этих водорослей в водоёме заведомо превысит 1 тонну, если количество водорослей в водоёме удваивается через каждые 3 дня.

Ответ: ______

Вариант № 6

1. Чему равен знаменатель геометрической прогрессии, если её второй член равен 12, а пятый — 324?

1) 9　　2) 6　　3) 3　　4) 4

2. Найдите сумму первых 12 членов арифметической прогрессии $5; 3; 1; -1; \ldots$

1) 36　　2) -72　　3) -48　　4) 52

3. Последовательности заданы несколькими первыми членами. Одна из них — геометрическая прогрессия. Укажите её.

1) $1; 2; 6; 8; \ldots$ 2) $2; -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{4}; \ldots$

3) $1; 3; 5; 7; \ldots$ 4) $2; 4; 5; 6; \ldots$

4. Выписано несколько последовательных членов геометрической прогрессии: ...; 24; x; 6; -3;... Найдите член прогрессии, обозначенный буквой x.

1) 12 2) -16 3) -12 4) 10

5. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_1 = 25$, $q = -\frac{1}{4}$.

Ответ: ______

6. В геометрической прогрессии $b_7 \cdot b_{15} = 25$. Найдите $b_4 \cdot b_{18}$.

Ответ: ______

7. При каком x числа $2x + 30$; $x + 10$; $-2x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии?

Ответ: ______

8. Согласно легенде, изобретатель шахмат попросил у падишаха в качестве награды такое количество пшеницы, которое получится, если на 1-ю клетку шахматной доски положить одно зёрнышко, а далее удваивать количество зёрен на каждой последующей клетке. Падишах распорядился принести мешок зерна. Определите, на какой клетке закончилось зерно в этом мешке, считая массу мешка равной 50 кг, а массу одного зёрнышка — 0,5 грамма.

Ответ: ______

§ 17. Исследование функции и построение графика

Основные сведения

Область определения функции

Областью определения $D(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл).

Области определения основных элементарных функций. Область определения любого многочлена — R.

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$$

$$D\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$$

Множество значений функции

Множеством (областью) значений $E(y)$ *функции* $y = f(x)$ называется множество всех таких чисел y_0, для каждого из которых найдется такое число x_0, что $f(x_0) = y_0$.

Области значений основных элементарных функций.

Областью значений всякого многочлена чётной степени является промежуток $[m;\ +\infty)$, где m — наименьшее значение этого многочлена, либо промежуток $(-\infty;\ n]$, где n — наибольшее значение этого многочлена.

Областью значений всякого многочлена нечётной степени является R.

$$E\left(\frac{1}{x}\right) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$$

$$E\left(\sqrt[2k]{x}\right) = [0;\ +\infty)$$

$$E\left(\sqrt[2k+1]{x}\right) = R$$

Чётность и нечётность функции

Функция $y = f(x)$ называется *чётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = f(x)$. График чётной функции симметричен относительно оси Oy.

Функция $y = f(x)$ называется *нечётной*, если для любого $x \in D(f)$ верно равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Графики элементарных функций. На рисунках 60 – 61 изображены графики основных элементарных функций.

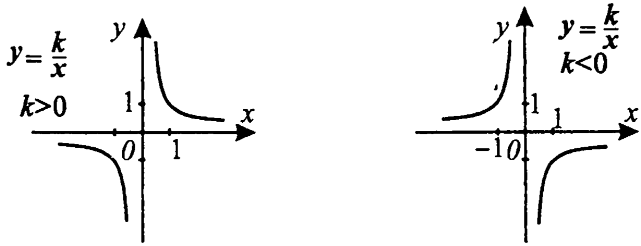


Рис. 60.

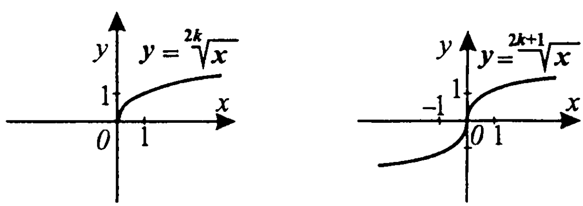


Рис. 61.

Построение графиков функций «механическими» преобразованиями

График функции $y = -f(x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Ox, см. рис. 62.

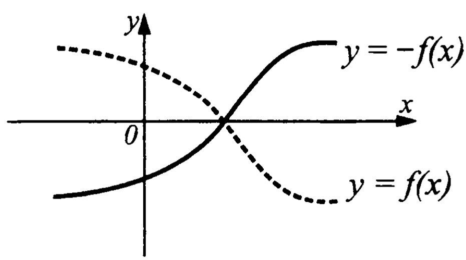


Рис. 62.

График функции $y = f(-x)$ получен из графика функции $y = f(x)$ отражением относительно оси Oy, см. рис. 63.

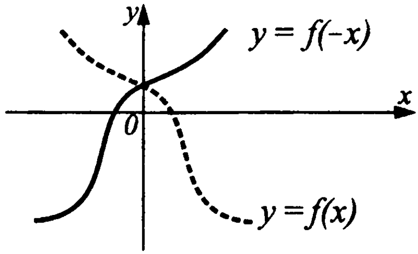


Рис. 63.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $m > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в m раз вдоль оси Oy от оси Ox, см. рис. 64.

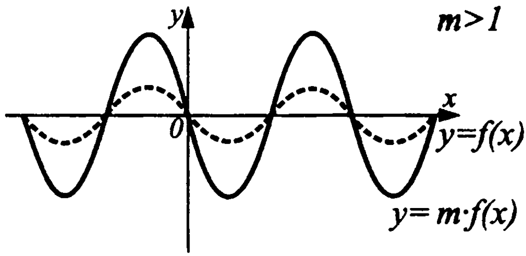


Рис. 64.

График функции $y = m \cdot f(x)$, $0 < m < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в $\frac{1}{m}$ раз вдоль оси Oy к оси Ox, см. рис. 65.

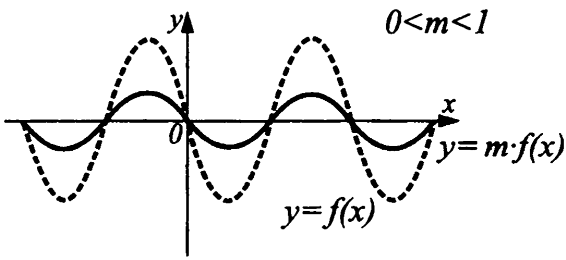


Рис. 65.

График функции $y = f(kx)$, $k > 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ сжатием в k раз к оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 66.

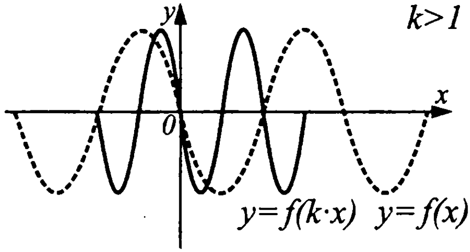


Рис. 66.

График функции $y = f(kx)$, $0 < k < 1$ получен из графика функции $y = f(x)$ растяжением в $\frac{1}{k}$ раз от оси Oy вдоль оси Ox, см. рис. 67.

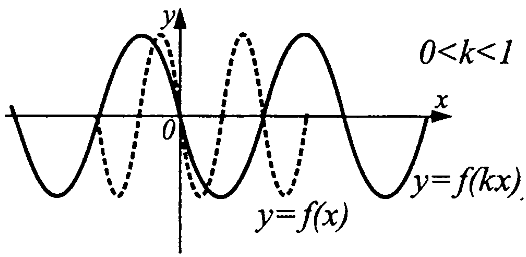


Рис. 67.

График функции $y = f(x) + b$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вверх на число b при $b > 0$ и сдвигом вниз на число $(-b)$ при $b < 0$, см. рис. 68.

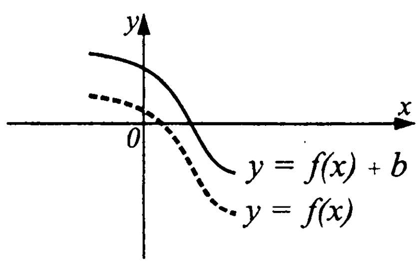


Рис. 68.

График функции $y = f(x + a)$ получен из графика функции $y = f(x)$ сдвигом вправо на число $-a$ при $a < 0$ и сдвигом влево на число a при $a > 0$, см. рис. 69.

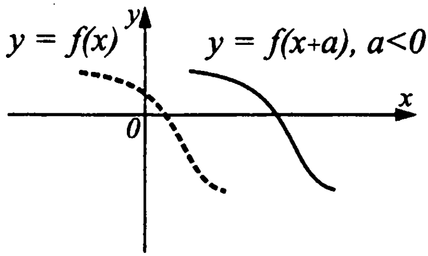


Рис. 69.

График функции $y = |f(x)|$ (рис. 71, *а*) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 70) отражением относительно оси Ox части этого графика, лежащей ниже оси Ox.

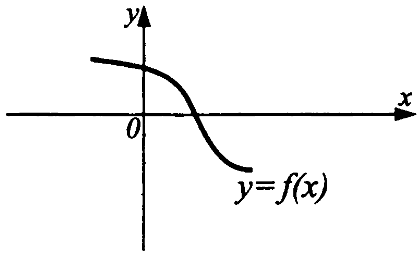


Рис. 70.

График функции $y = f(|x|)$ (рис. 71, *б*) получен из графика функции $y = f(x)$ (рис. 70) объединением части этого графика, лежащей правее оси Oy, с её отражением относительно оси Oy и удалением части, лежащей левее оси Oy.

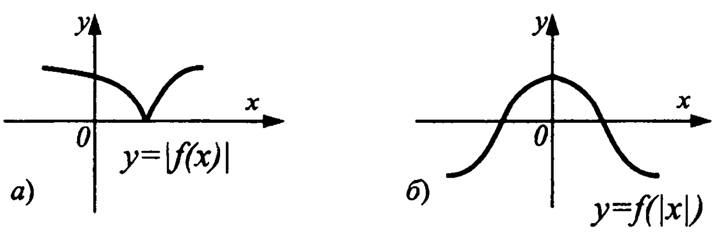


Рис. 71.

Демонстрационный вариант

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 - 4x + 1$. Найдите $f(-2)$.

1) 1 2) 17 3) 3 4) 12

Решение. $f(-2) = (-2)^3 - 4 \cdot (-2) + 1 = -8 + 8 + 1 = 1$.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. График какой из перечисленных ниже функций изображён на рисунке 72?

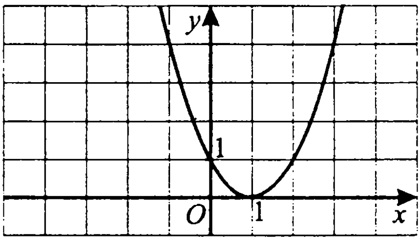


Рис. 72.

1) $y = -x^2 + x$ 2) $y = -(x+1)^2 + 1$
3) $y = (x+1)^2 - 1$ 4) $y = x^2 - 2x + 1$

Решение. На рисунке изображён график квадратичной функции, полученной сдвигом графика функции $y = x^2$ вдоль оси абсцисс на одну единицу вправо (см. «Основные сведения» к параграфу), значит, $y = (x-1)^2$, $y = x^2 - 2x + 1$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[0; 8]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 73), укажите промежутки возрастания.

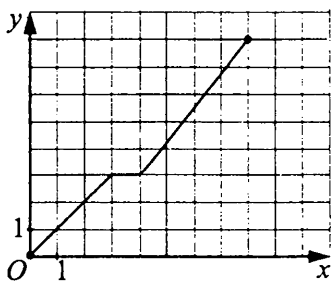


Рис. 73.

1) $[-2; 4]$ 2) $[0; 8]$ 3) $[0; 6] \cup [7; 8]$ 4) $[0; 3] \cup [4; 8]$

Решение. Функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции. По графику определяем, что это условие выполняется на промежутке $[0; 3]$ и на промежутке $[4; 8]$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. На рисунке 74 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

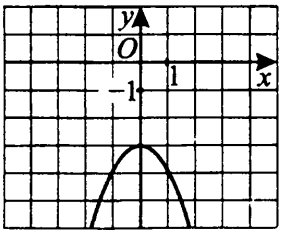


Рис. 74.

Решение. На рисунке изображён график квадратичной функции, полученный сдвигом (см. «Основные сведения» к параграфу) графика функции $y = -x^2$ вдоль оси ординат на 3 единицы вниз, значит, $y = -x^2 - 3$. Следовательно, $a < 0$, $c < 0$.

Ответ: $a < 0$; $c < 0$.

5. Среди функций $y = 5x^5$; $y = |x|$; $y = (x+3)^5$; $y = x^5 + 3$ выберите нечётную.

1) $y = 5x^5$ 2) $y = x^5 + 3$
3) $y = (x+3)^5$ 4) $y = |x|$

Решение. Функция нечётная, если выполняется равенство

$$y(-x) = -y(x). \qquad (*)$$

Исследуем предложенные функции.

1) $y(x) = 5x^5 \Rightarrow y(-x) = 5(-x)^5 = -5x^5 = -y(x)$ — равенство (*) выполняется.

2) $y(x) = |x| \Rightarrow y(-x) = |-x| = |x| = y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

3) $y(x) = (x+3)^5 \Rightarrow y(-x) = (-x+3)^5 = (3-x)^5 \neq -y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

4) $y(x) = x^5 + 3 \Rightarrow y(-x) = (-x)^5 + 3 = -x^5 + 3 \neq -y(x)$ — равенство (*) не выполняется.

Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ с осью абсцисс.

1) $(0;1)$ 2) $(1;0)$ 3) $\left(\frac{1}{3};0\right)$ 4) $\left(0;\frac{1}{3}\right)$

Решение. График заданной функции пересекает ось абсцисс в точке с координатами $(x_0;0)$. Найдём x_0 из условия $y(x_0) = 0$.

$$\frac{2}{x_0-3} + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + x_0 - 3 = 0, \\ x_0 - 3 \neq 0; \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 1.$$ Следовательно, $(1;0)$ — искомые координаты.

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

7. Найдите, при каком значении a точка $A(a;3)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x-4} - 2$.

1) 5 2) 29 3) 9 4) 1

Решение. Точка $A(a;3)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{x-4} - 2$, если $y(a) = 3$.

$$\sqrt{a-4} - 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a-4} = 5 \Leftrightarrow a = 29.$$

Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

8. По графику функции (см. рис. 75) найдите все значения x, при которых значения функции положительны.

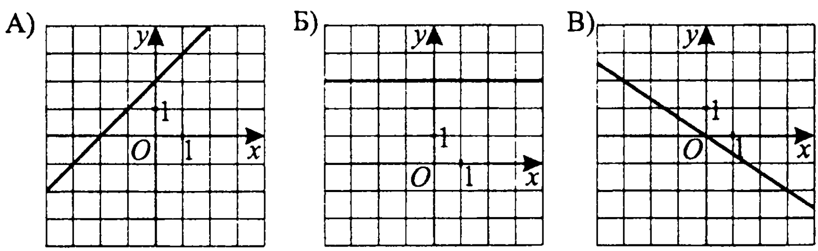


Рис. 75.

Решение. Задача сводится к нахождению значений x, при которых $y > 0$.

По графику, изображённому на рисунке 75, А определяем: $y > 0$ при $x > -2$.

По графику, изображённому на рисунке 75, Б определяем: $y > 0$ при любом значении x.

По графику, изображённому на рисунке 75, В определяем: $y > 0$ при $x < 0$.

Ответ:

А	Б	В
$(-2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; 0)$

Вариант № 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt[4]{8 - 2x} + 7$.

1) $(-\infty; 4)$ 2) $(-\infty; 4]$ 3) $[4; +\infty)$ 4) $(4; +\infty)$

2. График какой из перечисленных функций изображён на рисунке 76?

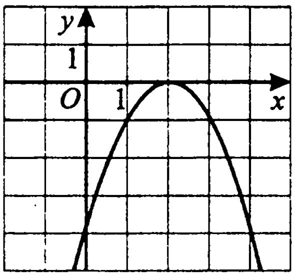


Рис. 76.

1) $y = x^2 + 4x$ 2) $y = -(x - 2)^2 - 4$

3) $y = (x - 2)^2 + 4$ 4) $y = -x^2 + 4x - 4$

3. Найдите область определения функции $y = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 1}}$.

1) $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ 2) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$ 3) $(0{,}25; +\infty)$ 4) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$

4. На рисунке 77 изображён график функции $y = ax^2 + c$. Определите знаки a и c.

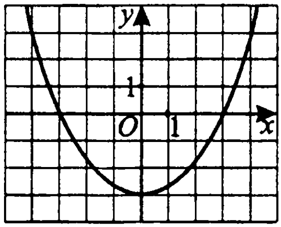


Рис. 77.

Ответ: ______

5. На рисунке 78 изображена кубическая парабола. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

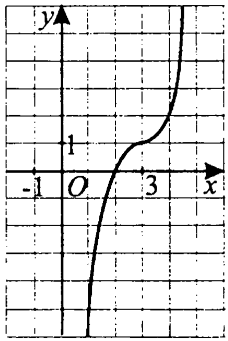


Рис. 78.

1) $y = (x-3)^3 + 1$ 2) $y = \left(\frac{x}{3}\right)^3 + 2$

3) $y = \left(\frac{x+1}{3}\right)^3$ 4) $y = \frac{x^3}{3} + 1$

6. Найдите абсциссу точки пересечения графика функции $y = \frac{1}{x-2} - 1$ с осью Ox.

Ответ: ______

7. Найдите количество точек пересечения графиков функций $y = -\frac{3}{x}$ и $y = -3x$.

Ответ: ______

8. Соотнесите функции с их графиками (см. рис. 79).

А) $y = x^2 + 1$; Б) $y = \frac{1}{x-2}$; В) $y = \sqrt{x+2}$

Ответ:

А	Б	В

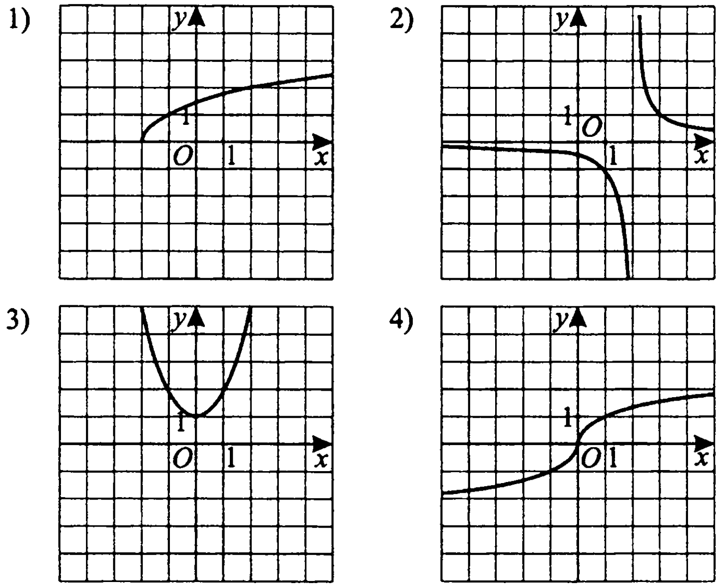


Рис. 79.

Вариант № 2

1. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-7; 4]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 80), укажите её область значений.

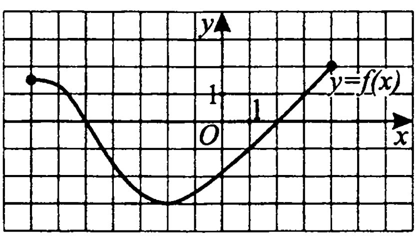


Рис. 80.

1) $[-5; 2]$ 2) $[-3; 2]$ 3) $[1; 2]$ 4) $[-3; 1]$

2. Соотнесите функции, заданные формулами, с их графиками (см. рис. 81).

А) $y = x + 3$ Б) $y = -x - 3$ В) $y = x - 3$

Ответ:

А	Б	В

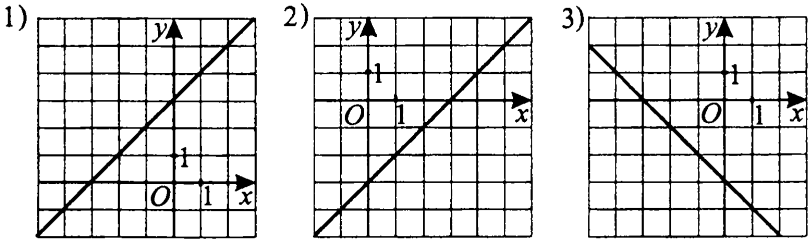


Рис. 81.

3. Укажите уравнение прямой, которая не имеет общих точек с графиком функции $y = -x^2 + 1$.

1) $y = 2$ 2) $y = 1$ 3) $y = 0$ 4) $y = -1$

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 82, решите неравенство $f(x) > -1$.

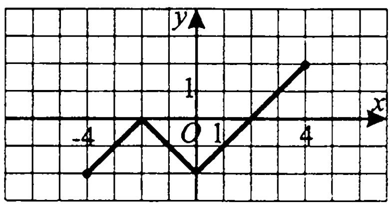


Рис. 82.

Ответ: ______

5. На рисунке 83 изображён график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$. Выберите верное соотношение.

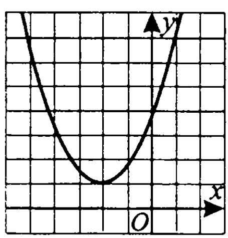


Рис. 83.

1) $a > 0,\ b^2 - 4ac \geqslant 0$ 2) $a < 0,\ b^2 - 4ac < 0$
3) $a > 0,\ b^2 - 4ac < 0$ 4) $a < 0,\ b^2 - 4ac = 0$

6. Найдите значение коэффициента k, если известно, что график функции $y = \dfrac{3k}{x}$ проходит через точку с координатами $(-2; 6)$.

Ответ: ______

7. Найдите координаты точки пересечения графика функции

$y = \dfrac{3}{x+1} - 2$ с осью абсцисс.

1) $(0{,}5; 0)$ 2) $(0; 0{,}5)$ 3) $(1; 0)$ 4) $(0; 1)$

8. На рисунке 84 изображены графики квадратичных функций:
А) $y = x^2+2$; Б) $y = -x^2+2$; В) $y = (x-2)^2$; Г) $y = -(x-2)^2$.

Для каждой функции укажите соответствующий график.

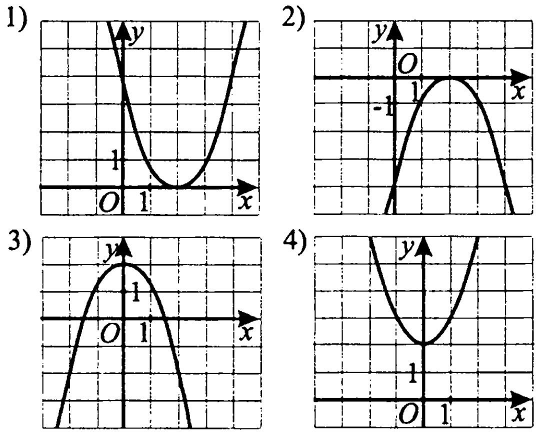


Рис. 84.

Ответ:

А	Б	В	Г

Вариант № 3

1. Функция задана формулой $f(x) = -x^2 + 3x - 1$. Найдите $f(-1)$.

1) -5 2) -3 3) 1 4) 2

2. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 85).

1) $x = 5$ 2) $y = 3$ 3) $y = 1 - x$ 4) $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В	Г

13. Зак. № 199

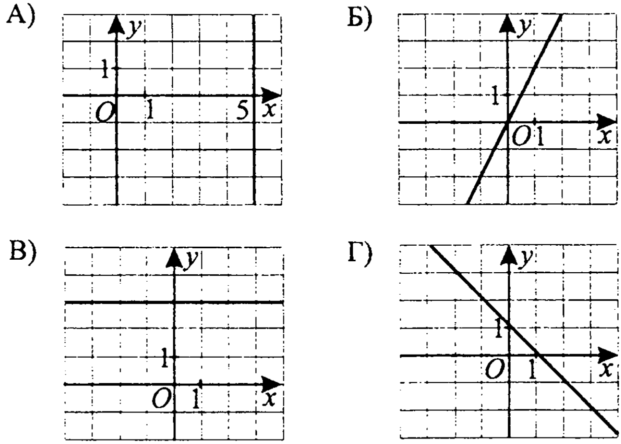


Рис. 85.

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-3; 5]$. Пользуясь графиком функции (см. рис. 86), укажите промежутки возрастания.

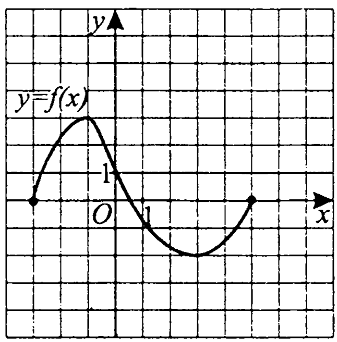


Рис. 86.

1) $[-3; 0]$ 2) $[1; 5]$ 3) $[-1; 3]$ 4) $[-3; -1] \cup [3; 5]$

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 4]$. Используя её график, изображённый на рисунке 87, решите неравенство $f(x) > 0$.

Ответ: ______

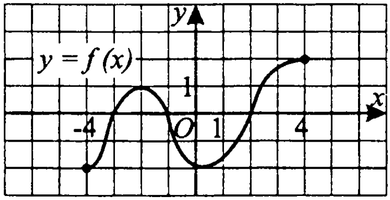


Рис. 87.

5. Из функций $y = 3x^4$; $y = 2x^5$; $y = (x-2)^2$; $y = x^3 - 2$ выберите чётную.

1) $y = 3x^4$ 2) $y = 2x^5$ 3) $y = (x-2)^2$ 4) $y = x^3 - 2$

6. Найдите, при каком k график функции $y = \dfrac{k}{x}$ проходит через точку $A\left(-6\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$.

Ответ: ______

7. Найдите, при каком значении a точка $A(a; 5)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt[3]{x+1} + 3$.

1) 10 2) 7 3) 6 4) 5

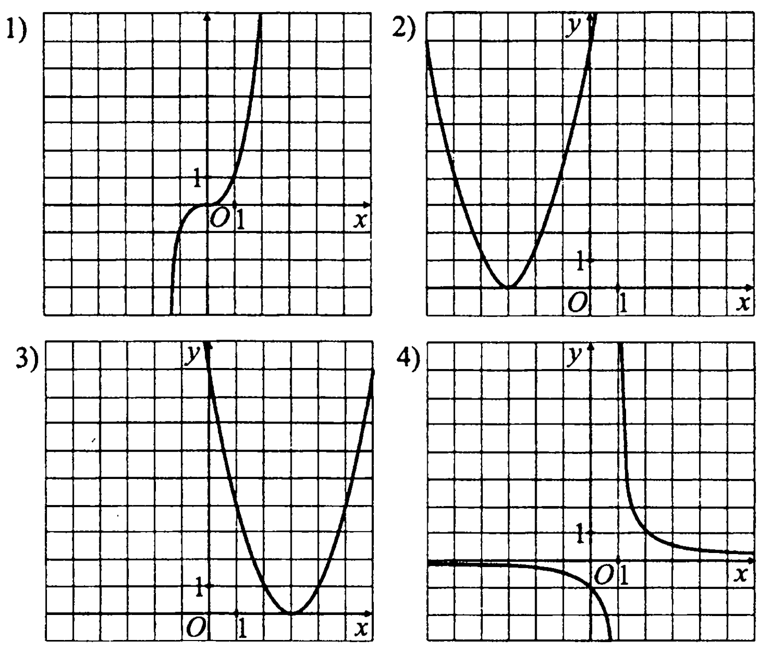


Рис. 88.

14. Зак. № 199

8. Соотнесите функции с их графиками (см. рис. 88).

А) $y = (x-3)^2$; Б) $y = \dfrac{2}{x-1}$; В) $y = x^3$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 4

1. Функция задана формулой $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Найдите $f(-2)$.

1) -19 2) 13 3) 0 4) -3

2. Каждую прямую, построенную на координатной плоскости, соотнесите с её уравнением (см. рис. 89).

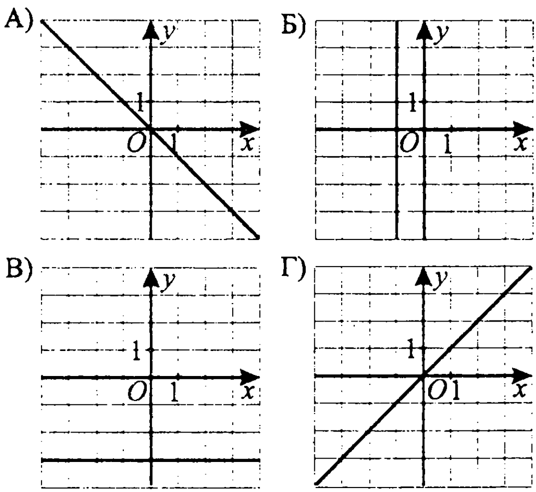


Рис. 89.

1) $x = -1$ 2) $y = x$ 3) $y = -x$ 4) $y = -3$

Ответ:

А	Б	В	Г

3. Функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[-4; 4]$ и задана своим графиком (см. рис. 90). На отрезке $[-4; 4]$ укажите её промежутки убывания.

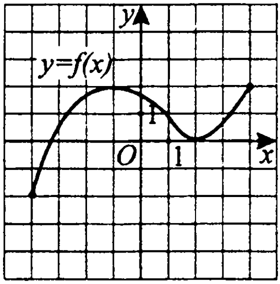


Рис. 90.

1) $[-4; -3]$ 2) $[-1; 2]$ 3) $[-3; 2]$ 4) другой ответ

4. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-4; 3)$ и задана своим графиком (см. рис. 91). Укажите область значений функции $y = f(x)$ на промежутке $[-4; 3)$.

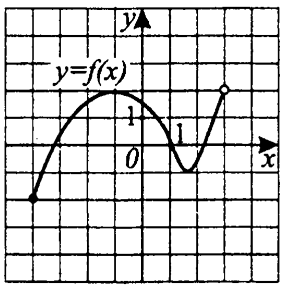


Рис. 91.

1) $[0; 2)$ 2) $[-2; 0]$ 3) $[-2; 2]$ 4) другой ответ

5. Из функций $y = 3x^2$; $y = 2x^5$; $y = x^4 + 1$; $y = (x - 1)^3$ выберите нечётную.

1) $y = 3x^2$ 2) $y = 2x^5$ 3) $y = x^4 + 1$ 4) $y = (x - 1)^3$

6. Найдите координаты точек пересечения графика функции $y = |x - 3|$ с осью Oy.

1) $(2; 0)$ 2) $(0; 2)$ 3) $(0; 3)$ 4) $(-3; 3)$

7. При каком значении a точка $M(a; 2)$ принадлежит графику функции $y = \sqrt{2 - x} - 1$?

Ответ: ______

8. Соотнесите графики функций, изображённых на рисунке 92, с соответствующими им значениями параметра k.

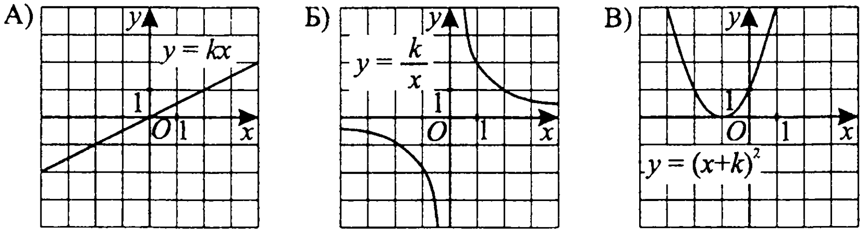


Рис. 92.

1) 2   2) 1   3) −1   4) $\frac{1}{2}$

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 5

1. Функция $y = f(x)$ задана графиком на отрезке [-5;5] (см. рис. 93). Найдите $f(-2)$.

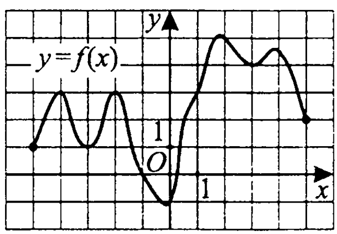


Рис. 93.

1) 1   2) 2   3) 3   4) −1

2. Соотнесите функции, заданные формулами, и их графики (см. рис. 94).

А) $y = 3 - x$ Б) $y = 2x$ В) $y = |x|$

Ответ:

А	Б	В

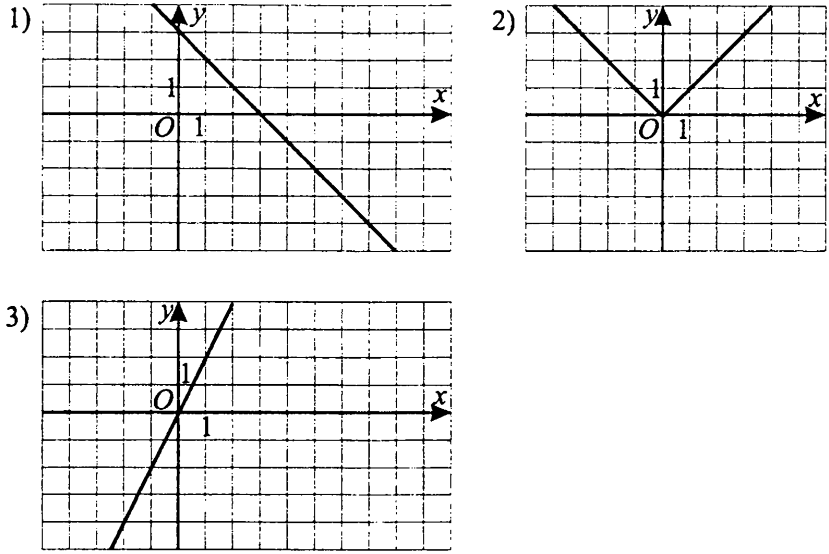


Рис. 94.

3. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке $[-5; 5]$ (см. рис. 95). Какой из указанных промежутков является промежутком знакопостоянства данной функции?

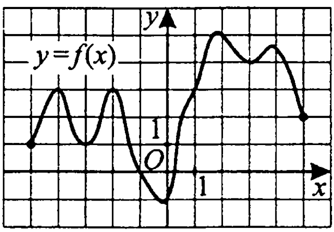


Рис. 95.

1) $[-3; 0]$ 2) $[0; 3]$ 3) $[-2; 1]$ 4) $[1; 5]$

4. Найдите область значений функции, указанной на рисунке 95.

1) $[-5; 5]$ 2) $[0; 5]$ 3) $[-1; 5]$ 4) $[-1; 4]$

5. Какая из следующих функций является возрастающей?

1) $y = x^3$ 2) $y = \dfrac{1}{2^x}$ 3) $y = 1 - x$ 4) $y = -2^x$

6. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = (x-2)^2 + 2$ и $y = x^2$.

1) $(2; 2)$ 2) $(0{,}5; 0{,}25)$ 3) $(1{,}5; 2{,}25)$ 4) $(0; 0)$

7. Найдите значение m, при котором точка $A(m, 2m+3)$ принадлежит графику функции $y = x^2 - 4x + 12$.

1) 3 2) 2 3) -1 4) 0

8. Соотнесите функции и их графики (см. рис. 96).

А) $y = x^3$; Б) $y = \sqrt{x}$; В) $y = |x|$

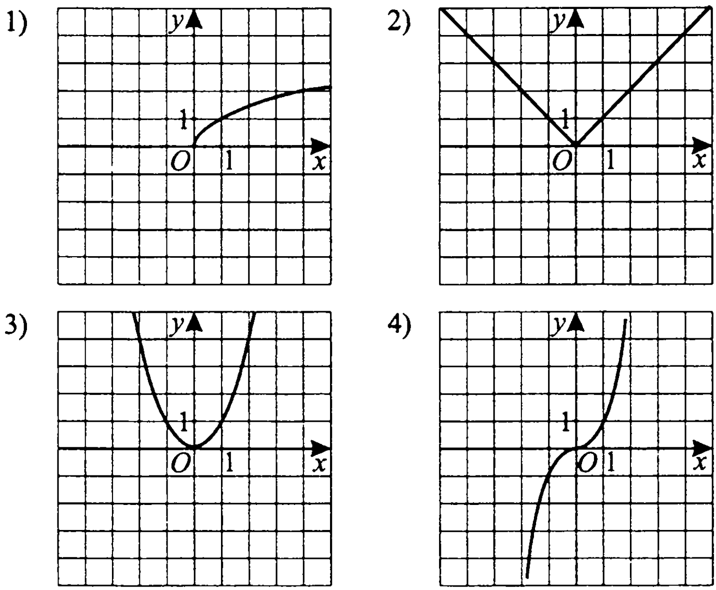


Рис. 96.

Ответ:

А	Б	В

Вариант № 6

1. Найдите область определения функции $y = 3 - \sqrt{3 - 3x}$.

1) $(-\infty; 3]$ 2) $(-\infty; 1]$ 3) $[3; +\infty)$ 4) $[1; +\infty)$

2. Соотнесите рисунок, изображающий график функции $y = kx + b$, (см. рис. 97), с одним из условий 1), 2) или 3).

1) $k < 0$; $b < 0$ 2) $k = 0$; $b < 0$ 3) $k > 0$; $b = 0$

Ответ:

А	Б	В

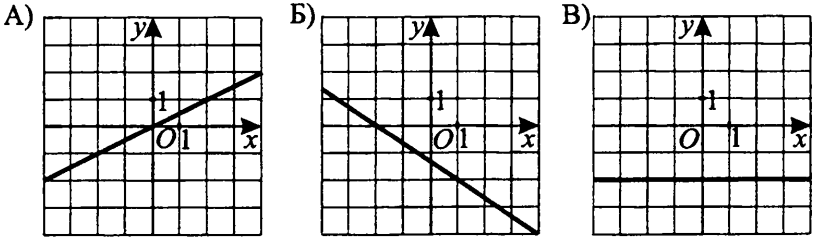


Рис. 97.

3. На рисунке 98 изображён график квадратичной функции. Какая из перечисленных формул задаёт эту функцию?

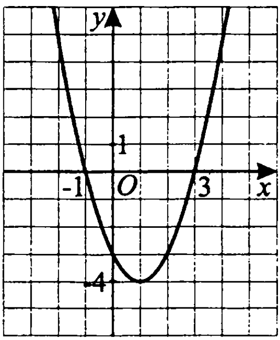


Рис. 98.

1) $y = x^2 - 2x - 3$ 2) $y = -x^2 - 2x - 3$

3) $y = x^2 + 2x - 3$ 4) $y = -x^2 - 2x + 3$

4. По графику квадратичной функции (см. рис. 99) найдите все значения x, при которых значения функции неотрицательны.

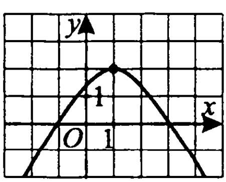


Рис. 99.

Ответ: ________________.

5. По графику квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ определите значение свободного члена c (см. рис. 100).

Ответ: ________________.

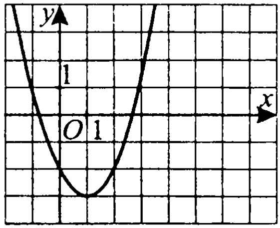


Рис. 100.

6. Какая из точек $A(2; -3)$, $B(-3; -1)$, $C(-2; -2)$, $D(0{,}5; -11)$ принадлежит графику функции $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x}, \text{ если } -3 \leqslant x < 0, \\ x^2, \text{ если } 0 \leqslant x < 1, \\ 5x + 1, \text{ если } x \geqslant 1 \end{cases} ?$$

Ответ: ________________ .

7. Найдите сумму координат точки пересечения графиков функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \dfrac{8}{x}$.

Ответ: ________________ .

8. На рисунке 101 схематически изображены графики двух зависимостей:

А) зависимости площади трапеции от её высоты при постоянной сумме оснований;

Б) зависимости высоты трапеции от суммы её оснований при постоянной площади.

Какой из них — 1 или 2 — является графиком зависимости А?

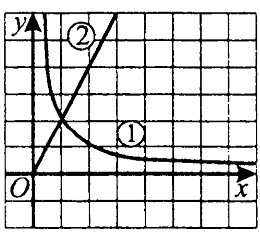


Рис. 101.

Ответ: ________________ .

§ 18. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Основные сведения

График — чертёж, наглядно изображающий количественное соотношение и развитие взаимосвязанных процессов или явлений в виде кривой, прямой, ломаной линии, построенной в той или иной системе координат.

График применяют как для наглядного изображения функциональной зависимости и придания наглядности исследованию, так и для быстрого фактического нахождения значений функции по значениям аргумента.

Графики могут определять последовательность выполнения действий, протекания событий во времени. Например, график движения поездов, график дежурств, график работы.

Диаграмма (греч. diagramma — изображение, рисунок, чертёж) — графическое представление данных, позволяющее быстро оценить соотношение нескольких величин, выполненное при помощи линий, плоскостей, геометрических фигур, рисунков и т.д.

Таблица (лат. tabula «доска») — способ передачи содержания, заключающийся в организации структуры данных, в которой отдельные элементы помещены в ячейки, каждой из которых соответствует пара значений — номер строки и номер столбца. Таким образом, устанавливается смысловая связь между элементами, принадлежащими одному столбцу или одной строке.

Демонстрационный вариант

1. Муравей поднялся вверх по стволу дерева, сделав одну остановку для отдыха, и спустился вниз. График, изображённый на рисунке 102, показывает, как менялась высота S, на которой находился муравей, в зависимости от времени t (по вертикальной оси откладывается высота в метрах, по горизонтальной — время в минутах). Используя график, определите, находясь на какой высоте, муравей решил отдохнуть.

Решение. Если муравей отдыхал, то высота S, на которой он находился, не изменялась, изменялось только время t. На основании данных графика делаем вывод: муравей отдыхал на высоте 8 м.

Ответ: 8.

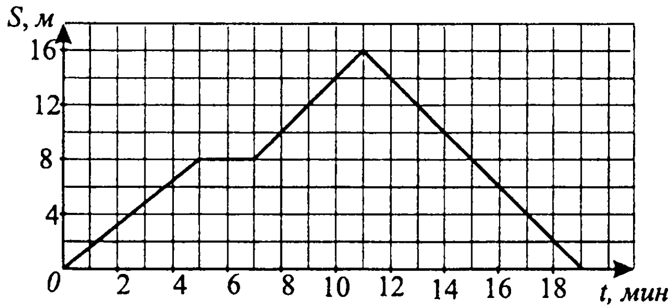


Рис. 102.

2. Мальчик пошёл вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 103 изображён график движения мальчика. Определите, пользуясь графиком,

а) сколько минут отдыхал мальчик у реки;

б) скорость мальчика на подъёме (в км/ч);

в) сколько минут заняла ходьба.

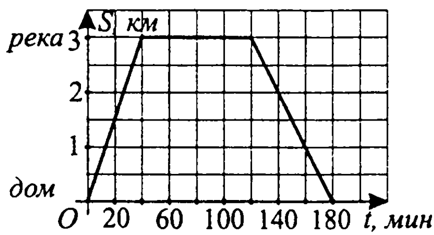


Рис. 103.

Решение. а) На графике время в минутах откладывается по горизонтальной оси. Одной клетке графика соответствует 20 минут. Во время отдыха расстояние не изменялось (то есть времени отдыха на графике соответствует горизонтальная прямая). Следовательно, время, затраченное на отдых: $20 \cdot 4 = 80$ мин.

б) Согласно условию задачи, подъём был по дороге от реки домой. Согласно графику, подъём осуществлялся со 120 мин. по 180 мин. Следовательно, время, затраченное на подъём: $20 \cdot 3 = 60$ мин. $= 1$ час. Река от дома находится на расстоянии 3 км, значит, скорость на подъёме была $3 : 1 = 3$ км/ч.

в) Мальчик отсутствовал дома 180 минут. Из них 80 минут отдыхал, значит, ходьба заняла $180 - 80 = 100$ (мин.).

Ответ: а) 80; б) 3; в) 100.

3. На рисунке 104 изображён график изменения температуры воздуха в течение суток, автоматически записанный с помощью специального прибора — самописца. Используя этот график, найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры в течение суток.

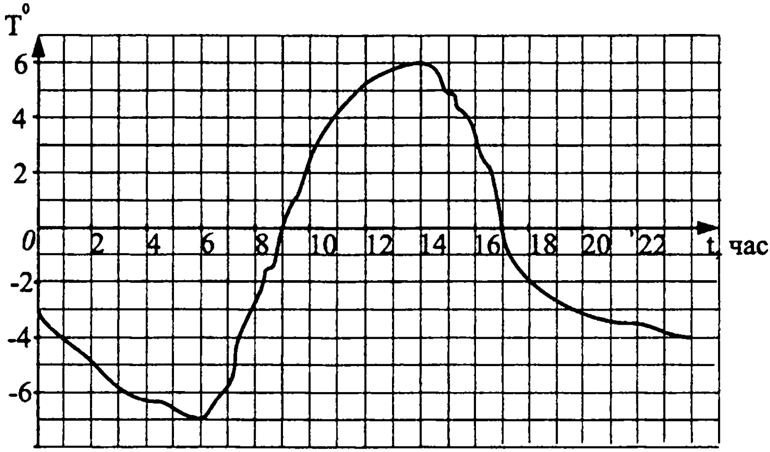


Рис. 104.

Решение. По графику определяем, что в течение суток наименьшая температура была $-7°C$, а наибольшая — $+6°C$. Разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры: $6-(-7)=6+7=13$.

Ответ: 13.

4. На графиках (см. рис. 105) показано количество мальчиков и девочек, рождённых в городе N в течение года. Насколько число родившихся девочек в период с марта по май включительно больше числа мальчиков, родившихся за этот же период?

Рис. 105.

Решение. Число мальчиков и девочек, родившихся с марта по май, представлено в таблице.

	март	апрель	май	Итого
мальчики	20	20	20	60
девочки	25	30	30	85

Девочек родилось на $85 - 60 = 25$ больше, чем мальчиков.

Ответ: 25.

5. На рисунке 106 представлены графики показаний счётчиков расхода горячей воды в течение 60 дней школой и жилым домом. Какой объект больше израсходовал горячей воды в период с 20-го по 40-й день включительно и на сколько м^3?

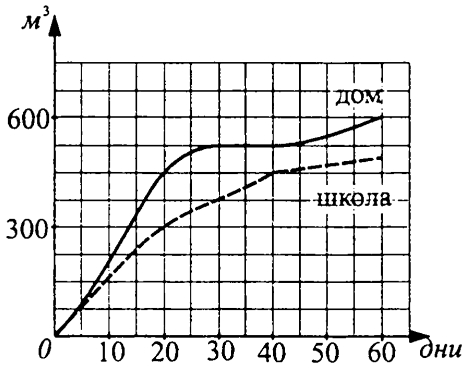


Рис. 106.

Решение. Найдём количество воды, израсходованное в период с 20-го по 40-й день включительно. Учитывая, что одной клетке графика соответствует 75 м^3 воды, определяем:

школа израсходовала $75 \cdot 2 = 150$ м^3;

дом — $75 \cdot 1 = 75$ м^3.

Следовательно, школа израсходовала горячей воды больше, чем жилой дом, на $150 - 75 = 75$ (м^3).

Ответ: школа, на 75.

6. В магазине игрушек представлены следующие цены на различные типы настольных игр:

Тип игры	A	B	C	D	E	F	G	H	K
Цена (руб.)	430	500	430	520	320	610	440	710	260

Определите количество типов игр, стоимость которых не превышает 430 рублей.

Решение. К играм, стоимость которых не превышает 430 рублей, то есть меньше либо равна 430 рублей, относятся типы A, C, E, K. Условию задания удовлетворяют 4 типа настольных игр.

Ответ: 4.

7. В таблице приведена стоимость работ по покраске стен.

Цвет стен	**Цена в рублях за 1 м^2 в зависимости от площади**		
	до 40 м^2	от 40 до 100 м^2	более 100 м^2
Белый	80	75	70
Другой	100	90	80

Пользуясь данными, представленными в таблице, определите, какова будет стоимость работ, если площадь стен 70 м^2, цвет — «Другой» (не белый) и действует сезонная скидка 10%.

Решение. Условию задачи соответствует ячейка таблицы, находящаяся на пересечении столбца «Цена в рублях за 1 м^2 от 40 до 100 м^2» и строки «Цвет стен „Другой“». Значит, цена за 1 м^2 составит 90 рублей, а за 70 м^2 — $90 \cdot 70 = 6300$ (рублей). Учитывая 10%-ную скидку, определяем, что стоимость работ будет равна $\dfrac{6300 \cdot (100\% - 10\%)}{100\%} = 5670$ (руб.).

Ответ: 5670.

8. Сотрудники двух салонов сотовой связи X и Y поспорили между собой, кто продаст больше телефонов в течение двух недель. На рисунке 107 показана зависимость общего числа проданных телефонов от времени. Какой салон продал больше телефонов со среды по пятницу второй недели и на сколько больше?

Решение. По графику определим количество продаж телефонов каждым салоном со среды по пятницу второй недели.

Салон X продал $1000 - 700 = 300$ (штук).

Салон Y продал $700 - 600 = 100$ (штук).

Следовательно, салон X продал за указанный период на $300 - 100 = 200$ (штук) телефонов больше, чем салон Y.

Ответ: салон X, на 200.

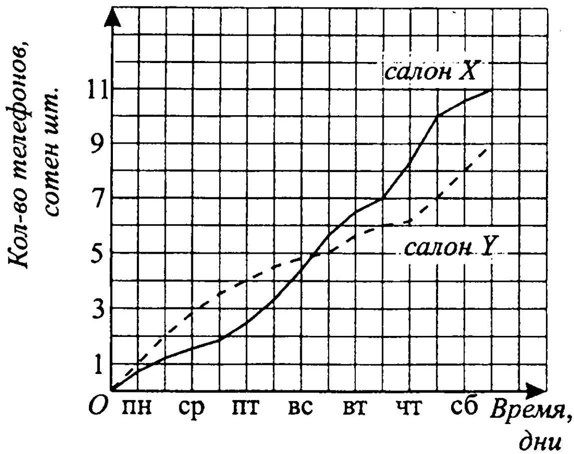


Рис. 107.

Вариант № 1

1. В течение четырёх суток измеряли температуру воздуха (см. рис. 108). В какой день колебания температуры были максимальны?
(По оси абсцисс откладывается время в сутках, а по оси ординат — температура.)

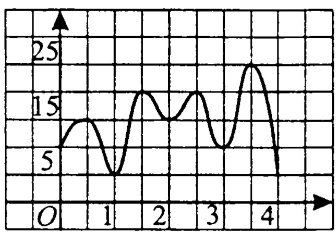


Рис. 108.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

2. Велосипедист поехал от дома вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 109 изображён график движения велосипедиста. Определите, пользуясь графиком:

а) сколько минут отдыхал велосипедист;
б) скорость велосипедиста на спуске к реке (в км/ч);
в) сколько минут заняла езда на велосипеде.

Ответ: ________________ .

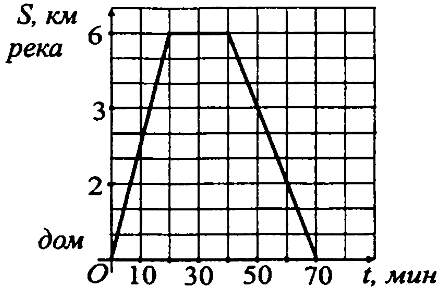


Рис. 109.

3. На соревнованиях в пятидесятиметровом бассейне спортсмен проплывает 150-метровую дистанцию. На рисунке 110 показан график изменения расстояния между пловцом и точкой старта во время заплыва.

Используя график, ответьте на вопрос: на какой по счёту пятидесятиметровке пловец плыл медленнее всего?

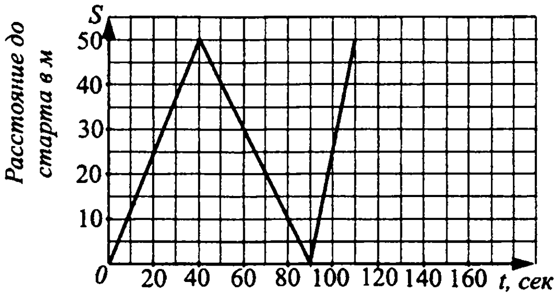


Рис. 110.

Ответ: ________________.

4. Легковая машина едет по горному серпантину. На рисунке 111 изображён график её движения. На каком отрезке времени скорость автомобиля была наибольшей?

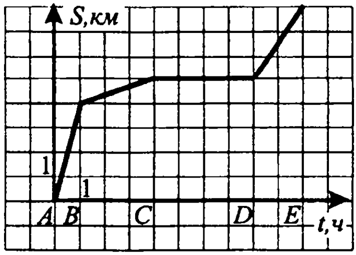


Рис. 111.

1) от A до B 2) от B до C 3) от C до D 4) от D до E

5. На графиках (см. рис. 112) показана зависимость количества произведённых рабочими А и Б деталей от времени. Какой из рабочих произвёл деталей больше в период с 3-го по 6-ой час рабочего времени и на сколько больше?

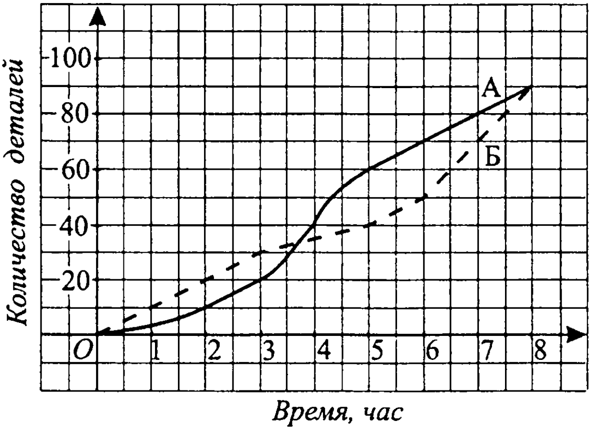


Рис. 112.

Ответ: ________________ .

6. Пчела летает от улья к цветку и обратно. На цветке она какое-то время собирает пыльцу. Расстояние от улья до цветка равно 5 м. На рисунке 113 изображён график зависимости расстояния между пчелой и ульем от времени движения пчелы. Определите, какое расстояние пролетела пчела за первые 40 секунд.

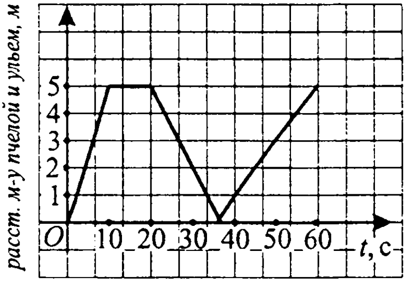


Рис. 113.

1) 1 2) 6 3) 11 4) 21

7. На рисунке 114 изображён график зависимости скорости v автобуса (в км/ч) от времени t (в ч). Найдите длину пути, пройденного автобусом за 5 ч. Для этого можно воспользоваться формулой $s = v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}$,

выражающей путь s, пройденный телом за время t при равноускоренном движении с ускорением a, где v_0 — начальная скорость тела.

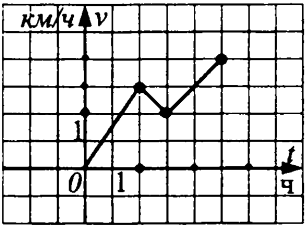


Рис. 114.

1) 15 2) 11,5 3) 14 4) 20

8. На графике (см. рис. 115) показана зависимость общего количества зерна, собранного каждым из комбайнов A и B, от времени. Какой комбайн собрал больше зерна с 5-го по 8-ой день уборки и на сколько тонн больше?

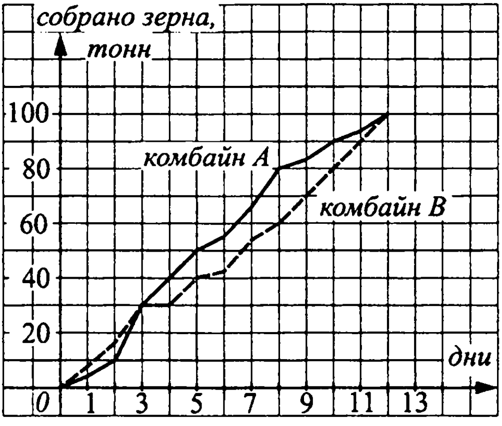


Рис. 115.

Вариант № 2

1. Банк предлагает 2 схемы выплаты кредита на товар:
схема I — равными платежами;
схема II — с начислением процентов на оставшуюся сумму кредита.
На рисунке 116 приведены графики зависимости выплачиваемой по кредиту суммы денег от времени, прошедшего с момента выдачи кредита.

Определите, на сколько тыс. руб. больше заплатит клиент банка, взявший кредит на 1 год, если воспользуется схемой I, а не схемой II.

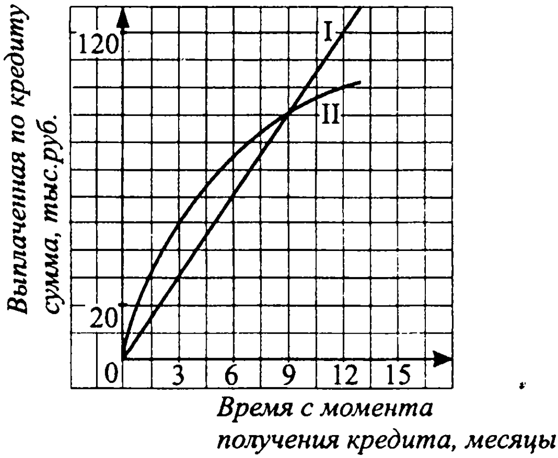


Рис. 116.

1) 10 тыс.руб. 2) 20 тыс.руб. 3) 30 тыс.руб. 4) 40 тыс.руб.

2. На рисунке 117 изображён график зависимости скорости ракеты v (в м/с) от времени t (в с), прошедшего с момента начала наблюдения за ней. Через какое время после начала наблюдения ракета наберёт скорость 8 км/с, если она будет продолжать движение с тем же ускорением?

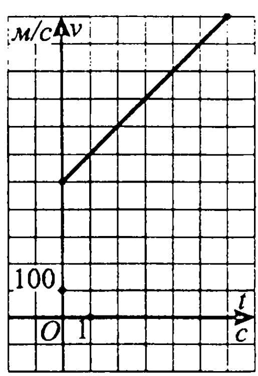


Рис. 117.

1) 1 мин 15 с 2) 1 мин 20 с 3) 125 мин 4) 1,5 мин

3. В тонком неоднородном стержне длиной 8 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 3l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Чему равны А, Б, В?

l — длина (в см)	А	4	8
m — масса (в г)	10	Б	В

Ответ: ________________.

4. Мальчик собирает вишню в ведро. Масса вишни в полном ведре 10 кг. Когда ведро наполняется, мальчик его осторожно высыпает и начинает снова собирать вишню. На рисунке 118 изображён график зависимости массы вишни в ведре от времени. Сколько всего вишни (в кг) было собрано за 1,5 часа?

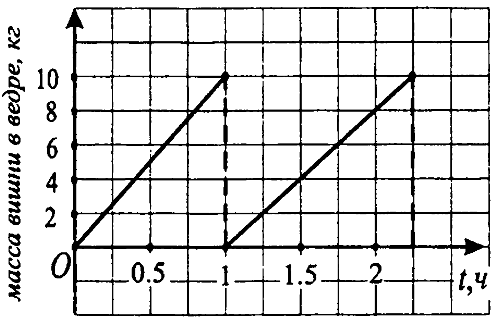


Рис. 118.

1) 4 2) 14 3) 18 4) 24

5. Некоторое тело движется из начала координат прямолинейно равноускоренно, и расстояние S от начала координат определяется формулой $S = 2t^2 + 7t$, где t — время, прошедшее с момента начала движения. Заполните таблицу.

t время в с		2	
S расстояние в м	4		49

6. Путник прошёл от пункта B до пункта A и вернулся обратно. На рисунке 119 изображен график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — длина пути от пункта B до положения путника.

Сколько всего времени путник двигался с наибольшей скоростью своего движения в пути от B до A и обратно?

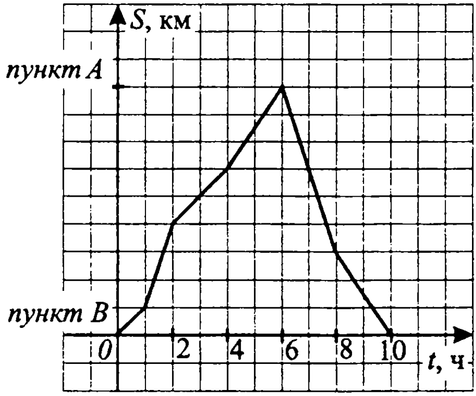


Рис. 119.

1) 2 ч 2) 3 ч 3) 4 ч 4) 5 ч

7. Два мяча подбросили вертикально вверх, и они упали на землю. На рисунке 120 изображены графики зависимости высоты мячей над землёй от времени полёта. Используя графики, выясните, какой из мячей за первые 2 секунды пролетел больше метров и на сколько больше.

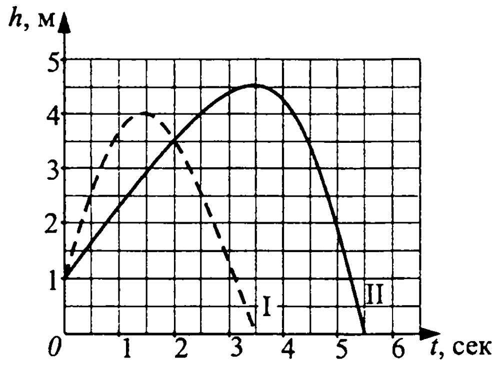


Рис. 120.

Ответ: ________________.

8. На графике показано движение двух объектов. Какой из них пройдёт большее расстояние в период с 20-ой по 50-ую минуты и на сколько больше (см. рис 121)?

Ответ: ________________.

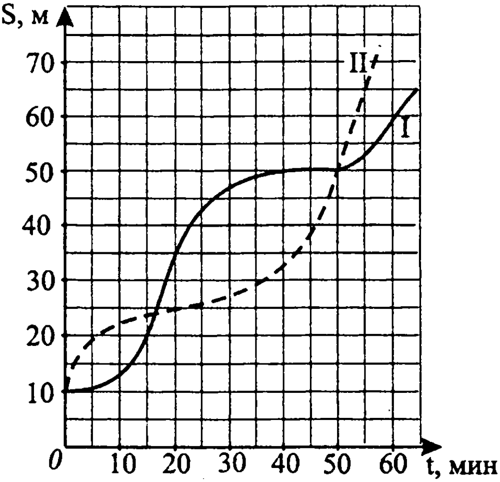


Рис. 121.

Вариант № 3

1. Пять лучших результатов районной олимпиады по физике представлены в таблице:

Фамилия ученика	Иванов	Петров	Буслов	Юрьев	Смирнов
Кол-во баллов	24,8	25,3	24,5	25,7	24,1

Какой ученик занял 4-е место?

1) Буслов 2) Петров 3) Юрьев 4) Иванов

2. На рисунке 122 изображён график движения тела, брошенного вертикально вверх. Найдите по графику,

а) сколько секунд тело поднималось вверх;

б) какой наибольшей высоты, считая от земли, достигло тело;

в) через сколько секунд тело упало на землю.

Ответ: ________________ .

3. Шесть различных полей засеяли кукурузой. Измерения уровня всхожести приведены в таблице:

№ поля	I	II	III	IV	V	VI
Уровень всхожести, %	85,7	87,6	88,5	87,8	88,4	87,9

Какое поле оказалось на пятом месте по уровню всхожести?

1) I 2) II 3) III 4) IV

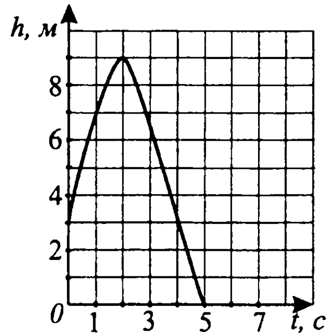


Рис. 122.

4. Коллекция моделей одежды разной цветовой гаммы представлена в виде диаграммы (см. рис. 123). Сколько в коллекции моделей красного цвета, если всего в ней 80 моделей?

Рис. 123.

Ответ: ________________.

5. В тонком неоднородном стержне длиной 10 см его масса (в граммах) распределяется по закону $m = l^2 + 5l$, где l — длина стержня, отсчитываемая от его начала. Заполните таблицу.

l — длина в *см*		5	10
m — масса в *г*	6		

6. Состав сплава массой 75 кг представлен на диаграмме (см. рис. 124). Сколько килограммов железа содержится в этом сплаве?

1) 5 2) 12 3) 3 4) 60

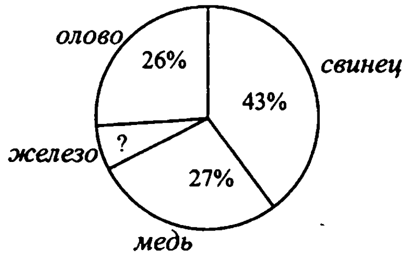


Рис. 124.

7. На рисунке 125 изображены графики зависимости количества решённых задач на экзамене от времени для учеников А и Б. Кто решил больше задач за последний час и на сколько?

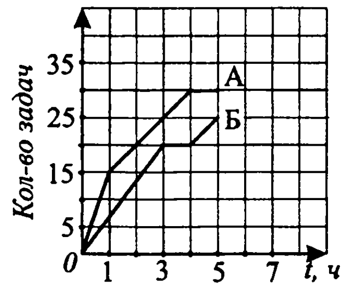


Рис. 125.

Ответ: ________________.

8. На рисунке 126 изображены графики продаж телефонов салонами сотовой связи *А* и *Б* в течение двух недель. Какой салон продал больше телефонов с четверга первой недели по пятницу второй и на сколько?

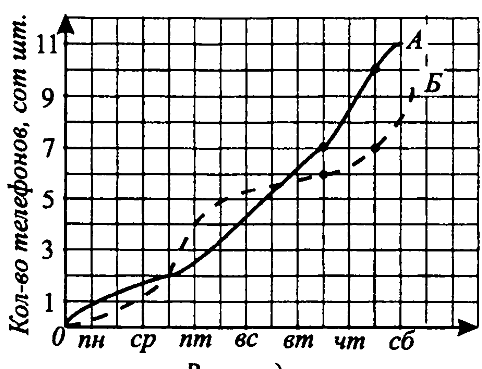


Рис. 126.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. На рисунке 127 изображены графики движения лодки и катера, вышедших из одной пристани в одном направлении. Определите, пользуясь графиком,

а) на каком расстоянии от пристани катер догнал лодку;

б) через сколько часов после выхода катера произошла встреча;

в) на каком расстоянии друг от друга были лодка и катер в 12 часов.

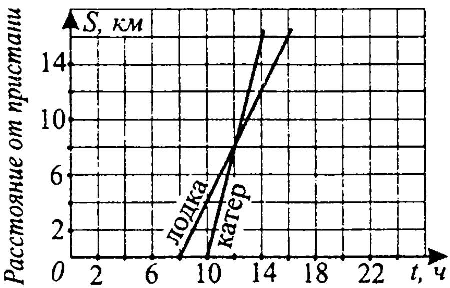


Рис. 127.

Ответ: ________________.

2. На рисунке 128 изображён график движения тела, брошенного вертикально вверх. Найдите по графику,

а) сколько времени тело поднималось вверх;

б) какой наибольшей высоты достигло тело;

в) через сколько секунд тело упало на землю.

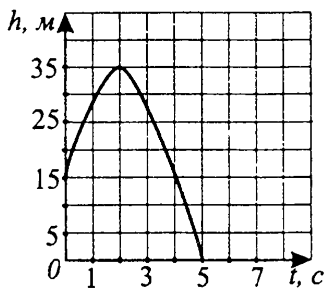


Рис. 128.

Ответ: ________________.

3. Турист собрался в поход. В походе он сделал два привала и после второго привала вернулся на турбазу. На рисунке 129 изображён график движения туриста. Какова средняя скорость (в км/ч) туриста за всё время движения? (Время на привалы не учитывать.)

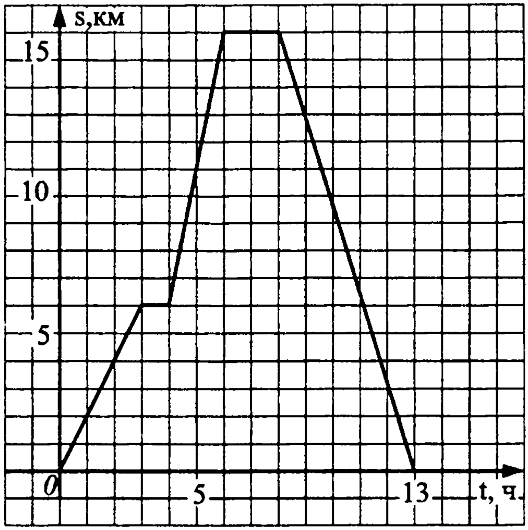


Рис. 129.

1) $\frac{16}{13}$ 2) $\frac{13}{16}$ 3) $\frac{8}{5}$ 4) $\frac{16}{5}$

4. Результаты анализа полученной предприятием прибыли за год представлены в виде круговой диаграммы (см. рис. 130). Какая прибыль (в рублях) была получена предприятием в 3-м квартале, если за год прибыль составила 2400 тыс. рублей?

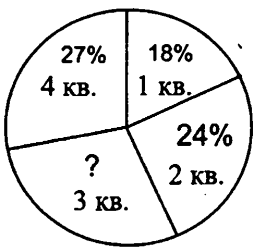


Рис. 130.

1) 656 000 2) 701 200 3) 744 000 4) 810 000

5. В специализированном магазине одежды продаётся 50 видов костюмов. Они распределены по цене (граничную цену относят к более высокой категории):

Цена (тыс.руб.)	до 4-х	4 – 7	7 – 10	10 – 13	$\geqslant 13$
Кол-во видов	7	8	?	20	5

Найдите по таблице,

а) сколько видов костюмов сто́ят от 7 до 10 тыс. руб.;

б) отношение количества самых дорогих костюмов к общему количеству костюмов;

в) процент костюмов ценой от 10 до 13 тыс. руб.

Ответ: ________________ .

6. Поквартальное исполнение сметы расходов предприятия на год представили в виде круговой диаграммы (см. рис. 131).

Какую сумму планируется израсходовать в 1-м квартале, если общий объём годовой сметы расходов составляет 1500 тыс. рублей?

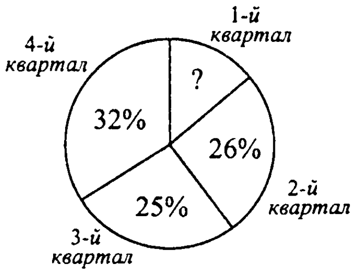


Рис. 131.

1) 170 тыс. рублей
2) 315 тыс. рублей
3) 375 тыс. рублей
4) 255 тыс. рублей

7. Компания «Аэрофлот» проанализировала ежегодные расходы, связанные с эксплуатацией самолётов двух типов — *А* и *Б*. На графике (см. рис. 132) показана зависимость ежегодной стоимости эксплуатации самолёта (y, млн руб.) от возраста (x, лет). Стоимость обслуживания какого вида самолётов была выше на момент конца 18-го года эксплуатации самолётов и на сколько? (Ответ выразите в млн рублей.)

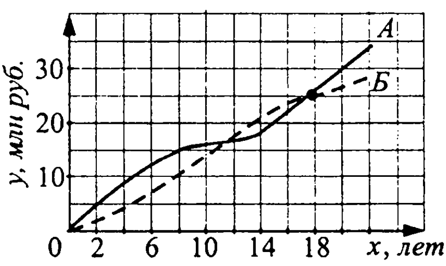


Рис. 132.

Ответ: ________________ .

8. На графике (см. рис. 133) показано, как менялась температура воздуха в городе x и городе y в течение суток. В каком городе температура повысилась больше и на сколько градусов в период с 12 часов до 16 часов?

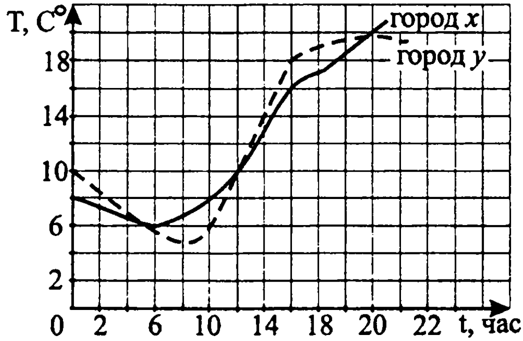


Рис. 133.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. В таблице приведены результаты соревнований по прыжкам в высоту.

Страна	Россия	США	Китай	Англия	Франция	КНДР	ЮАР
Результат (м)	2,4	2,08	1,96	1,97	2,22	1,7	1,7

Представитель какой страны показал третий результат?

1) Китай 2) США 3) Англия 4) Франция

2. Автомобилист выезжает из одного города в другой. На рисунке 134 изображён график его движения (по вертикальной оси — расстояние до первого города).

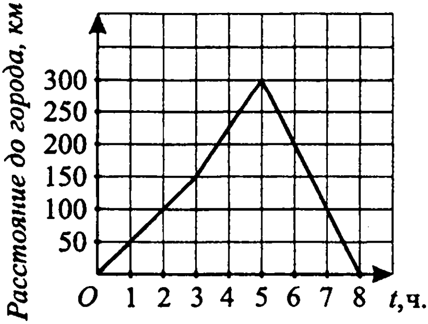


Рис. 134.

Определите, пользуясь графиком,

а) с какой скоростью он ехал первоначально;

б) через сколько часов после начала движения автомобилист понял, что заблудился, и поехал обратно;

в) с какой скоростью он поехал к первому городу.

Ответ: ________________ .

3. Количество слоек с разной начинкой в магазине представлено в виде круговой диаграммы (см. рис. 135). Сколько слоек с вишнёвой начинкой, если слоек с абрикосовой начинкой 15, а всего в магазине 150 слоек?

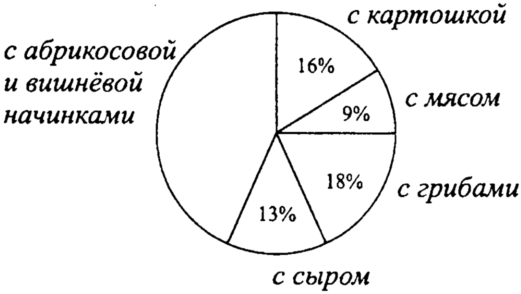


Рис. 135.

Ответ: ________________ .

4. На складе имеется 250 упаковок с различными напитками (см. рис. 136). Найдите x.

Ответ: ________________ .

5. После рыбалки отец и сын подсчитали свой улов и составили таблицу (см. рис. 137).

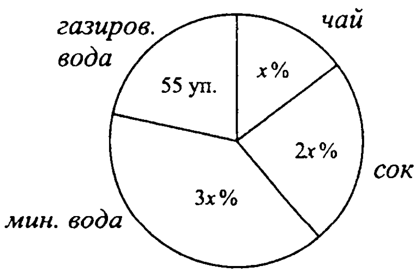


Рис. 136.

Определите по таблице,

а) сколько процентов составляет улов сына от улова отца;

б) какую часть составляют пойманные караси от общего улова;

в) отношение количества пойманных сыном окуней к количеству пойманных отцом карасей.

Ответ: ________________ .

	карась	окунь	другая рыба
отец	8	7	1
сын	2	8	4

Рис. 137.

6. В саду 400 плодовых деревьев, состав которых представлен на круговой диаграмме (см. рис. 138). Сколько груш произрастает в саду?

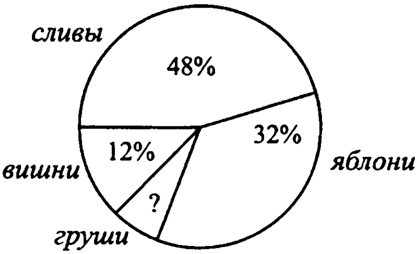


Рис. 138.

1) 12 2) 40 3) 32 4) 240

7. Результаты анализа полученной предприятием прибыли за год представили в виде круговой диаграммы (см. рис. 139). Какая прибыль была получена предприятием во 2-м квартале, если за год прибыль составила 1200 тыс. рублей?

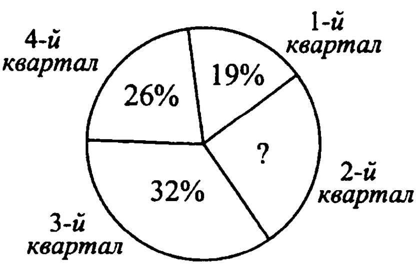


Рис. 139.

1) 276 тыс. рублей 2) 230 тыс. рублей
3) 288 тыс. рублей 4) 300 тыс. рублей

8. Из города выехал первый автомобилист. График его движения представлен на рисунке 140. Через два часа за ним выезжает второй автомобилист. С какой скоростью должен ехать второй автомобилист, чтобы догнать первого через четыре часа после своего выезда?

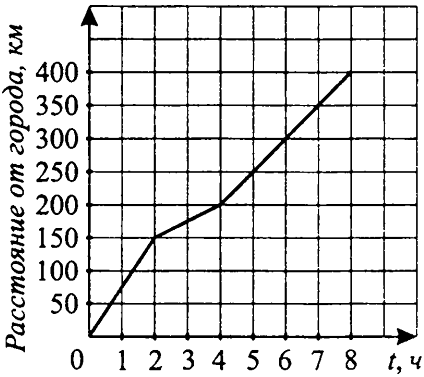


Рис. 140.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. На рисунке 141 изображены графики зависимости от времени положения двух велосипедистов на протяжении гонки. На сколько километров больше проехал победитель гонки по сравнению с соперником за последний час до своего финиша?

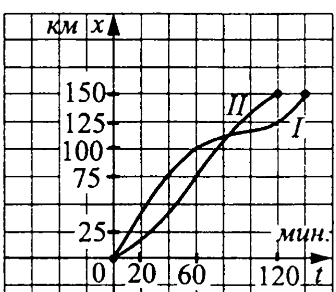


Рис. 141.

1) 75 км 2) 50 км 3) 25 км 4) 10 км

2. На рисунке 142 изображены графики движения автомобиля (график AB) и автобуса (график CD), вышедших из одного и того же города в одном направлении. Определите, пользуясь графиком,

а) на каком расстоянии от города автомобиль догнал автобус;

б) через сколько часов после выхода автобуса произошла встреча;

в) на каком расстоянии друг от друга были автобус и автомобиль в 8 часов.

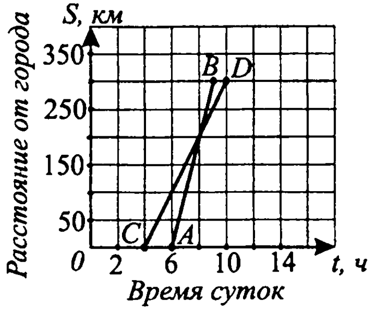


Рис. 142.

Ответ: ________________ .

3. Автомобиль проехал от пункта B до пункта A и вернулся обратно. На рисунке 143 изображён график его движения: по горизонтальной оси откладывается время движения, по вертикальной — длина пути от пункта B до положения автомобиля.

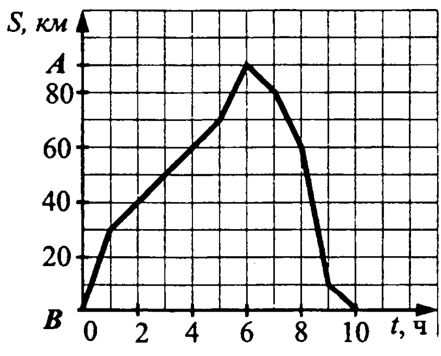


Рис. 143.

Какое общее расстояние автомобиль проехал с минимальной скоростью в пути от B к A и обратно?

1) 30 км 2) 40 км 3) 50 км 4) 60 км

4. Катер перевозил отдыхающих с одного берега озера на другой. На рисунке 144 изображён график движения катера во время четырёх рейсов.

Используя график, ответьте на вопрос: на каком по счёту рейсе катер шёл медленнее всего?

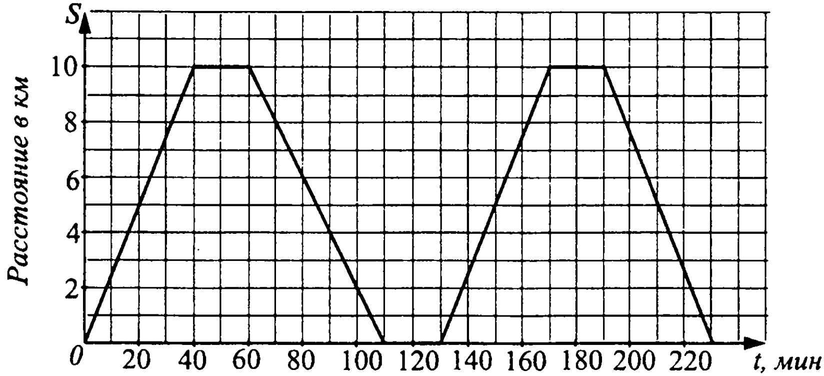


Рис. 144.

5. На диаграмме (см. рис. 145) показано количество деревьев, посаженных в парке в период с 1991 по 1995 годы. Определите, в какой из периодов посажено деревьев больше: 1991 – 1992 или 1993 – 1995.

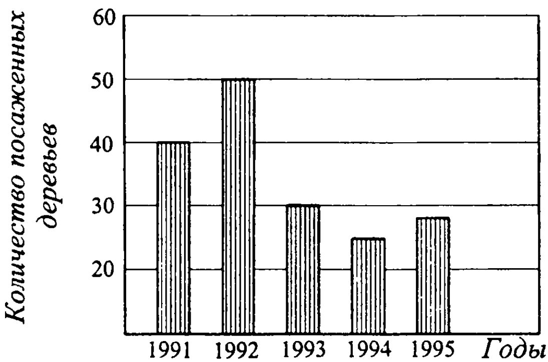


Рис. 145.

Ответ: __________________ .

6. На плодово-овощной базе первые 5 дней бананы продают по 25 руб., далее — по 15 руб. Какой график (см. рис. 146, по оси Ox отмеряется время в сутках, по оси Oy — стоимость бананов в руб.) соответствует этим условиям?

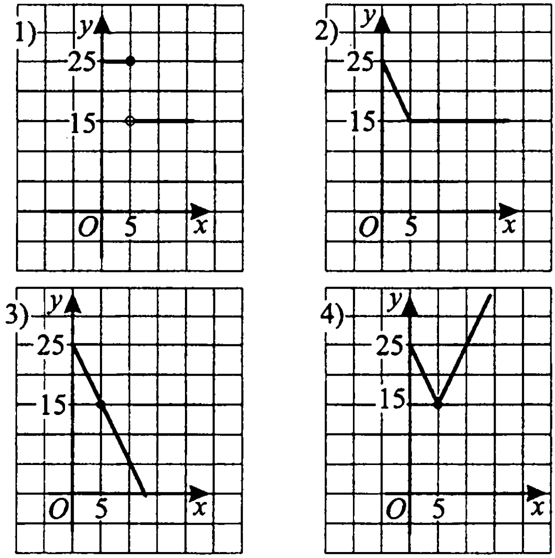


Рис. 146.

7. На рисунке 147 изображён график зависимости скорости v автобуса (в км/ч) от времени t (в ч). Найдите длину пути, пройденного автобусом за 5 ч. Для этого можно воспользоваться формулой $s = v_0t + \frac{at^2}{2}$, выражающей путь s, пройденный телом за время t при равноускоренном движении с ускорением a, где v_0 — начальная скорость тела.

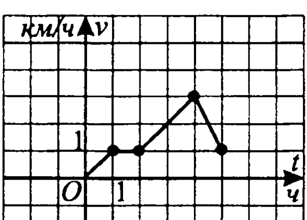


Рис. 147.

1) 15 2) 5 3) 7,5 4) 7

8. Некоторая компания решила проанализировать эффективность рекламы на товары двух видов: M и N. На графике (см. рис. 148) показана зависимость еженедельного объёма продаж от расходов на рекламу.

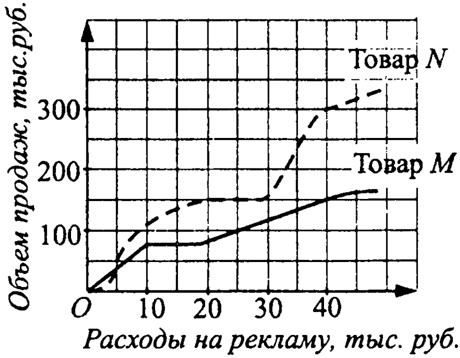


Рис. 148.

Объём продажи какого вида товара был больше и на сколько тысяч рублей, в тот момент когда расходы на рекламу составили 40 тыс. рублей?

Ответ: ________________ .

§ 19. Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений

Основные сведения

Многочленом n-й степени называется многочлен вида

$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$

где $a_0, a_1, \dots, a_n$ — заданные числа, $a_0 \neq 0, n \in N,$

a_0x^n — старший член многочлена $P_n(x)$,

n — степень многочлена,

a_n — свободный член многочлена.

Алгебраическим уравнением n-й степени называется уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Если уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$

с целыми коэффициентами $a_0, a_1, \dots, a_n$, где $a_n \neq 0$, имеет целый корень, то этот корень является делителем числа a_n (свободного члена уравнения).

Теорема Безу и схема Горнера

Для любого многочлена степени $n > 0$

$$f(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$$

и любого числа $x_0 \in R$ найдется такой многочлен степени $n-1$

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0,$$

что справедливо равенство

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) + f(x_0) \quad \textbf{(Теорема Безу)},$$

причём коэффициенты $q(x)$ могут быть вычислены по следующему алгоритму:

$$b_{n-1} = a_n,\ b_{n-2} = x_0b_{n-1} + a_{n-1},$$
$$b_{n-3} = x_0b_{n-2} + a_{n-2}, \dots,\ b_{i-1} = x_0b_i + a_i, \dots$$
$$\dots,\ b_1 = x_0b_2 + a_2,\ b_0 = x_0b_1 + a_1,\ f(x_0) = x_0b_0 + a_0.$$

Результаты вычисления коэффициентов многочлена $q(x)$ удобно помещать в таблицу **(схему Горнера)**.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\cdots$	a_{i+1}	a_i	$\cdots$	a_2	a_1	a_0
x_0	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\cdots$	b_i	b_{i-1}	$\cdots$	b_1	b_0	$f(x_0)$

Понятно, что если x_0 — корень многочлена $f(x)$, то $f(x_0) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) = (x - x_0)\,q(x) \quad \textbf{(следствие из теоремы Безу).}$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли число x_0 корнем многочлена $f(x)$, нужно заполнить приведённую выше таблицу (схему Горнера). Если $f(x_0)$ окажется равным 0, то x_0 — корень. В противном случае x_0 — не корень $f(x)$.

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

Решение. Заметим, что $x = 2$ — корень уравнения, так как $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$. Выполним деление:

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^3 - 4x^2 + x + 6 & x - 2 \\ \cline{2-2}
x^3 - 2x^2 \phantom{{}+ x + 6} & x^2 - 2x - 3 \\ \cline{1-1}
-\; -2x^2 + x + 6 & \\
-2x^2 + 4x \phantom{{}+6} & \\ \cline{1-1}
-\; -3x + 6 & \\
-3x + 6 & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Корнями уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$ являются $x_2 = -1$ и $x_3 = 3$. Следовательно, корнями уравнения (1), а значит, и исходного уравнения являются значения $x \in \{-1; 2; 3\}$

Ответ: $-1; 2; 3$.

2. Разделите многочлен $x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x$ на многочлен $x^2 + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^5 + x^4 - x^3 + 2x^2 - 6x & x^2 + 2 \\ \cline{2-2}
x^5 \phantom{{}+x^4} + 2x^3 \phantom{{}+ 2x^2 - 6x} & x^3 + x^2 - 3x \\ \cline{1-1}
-\; x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6x & \\
x^4 \phantom{{}-3x^3} + 2x^2 \phantom{{}-6x} & \\ \cline{1-1}
-\; -3x^3 \phantom{{}+2x^2} - 6x & \\
-3x^3 \phantom{{}+2x^2} - 6x & \\ \cline{1-1}
0 &
\end{array}$$

Ответ: $x^3 + x^2 - 3x$.

3. Решите уравнение $\dfrac{4}{x^2+6x+9} - \dfrac{6}{9-x^2} = \dfrac{1}{x-3}$.

Решение. ОДЗ: $x \neq \pm 3$.

Преобразуем исходное уравнение к виду $\dfrac{4}{(x+3)^2} + \dfrac{6}{x^2-9} = \dfrac{1}{x-3}$.

Умножая обе части полученного уравнения на $(x+3)^2(x-3)$, получим $4(x-3)+6(x+3)=(x+3)^2 \Leftrightarrow 4x-12+6x+18=x^2+6x+9 \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1=1$ и $x_2=3$.

Так как $x_2=3$ не принадлежит ОДЗ, то корень исходного уравнения — $x=1$.

Ответ: 1.

4. Найдите наибольший корень уравнения
$2x^4+x^3-6x^2+x+2=0$.

Решение. Заметим, что $x=0$ не является корнем данного уравнения. Разделив обе части уравнения на x^2, получим

$$2x^2+x-6+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+\left(x+\frac{1}{x}\right)-6=0.$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$, тогда $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}=t^2$, отсюда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$.

Уравнение примет вид $2(t^2-2)+t-6=0 \Leftrightarrow 2t^2+t-10=0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-2{,}5. \end{array}\right.$

Вернёмся к исходной переменной.

1) $x+\dfrac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0$. Отсюда $x=1$.

2) $x+\dfrac{1}{x}=-2{,}5 \Leftrightarrow x^2+2{,}5x+1=0 \Leftrightarrow 2x^2+5x+2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{1}{2}, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Из чисел $-2; -\dfrac{1}{2}; 1$ наибольшее 1.

Ответ: 1.

5. Найдите все рациональные корни уравнения
$x^4 - 3x^3 - 13x^2 + 9x + 30 = 0$.

Решение. Рациональные корни данного уравнения найдём среди делителей свободного члена.

Делители числа 30: $\pm1; \pm2; \pm3; \pm5; \pm6; \pm10; \pm15; \pm30$.

Для некоторых делителей проверим, являются ли они корнями уравнения по схеме Горнера:

	1	**−3**	**−13**	**9**	**30**	
1	1	−2	−15	−6	24	не корень
−1	1	−4	−9	18	12	не корень
2	1	−1	−15	−21	−12	не корень
−2	1	−5	−3	15	0	корень
−2	1	−7	11	−7		не корень
3	1	−2	−9	−12		не корень
−3	1	−8	21	−48		не корень
5	1	0	−3	0		корень

Следовательно, левую часть уравнения можно разложить на множители:

$(x+2)(x-5)(x^2-3) = 0$,

$(x+2)(x-5)(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) = 0$.

Рациональные корни уравнения: $x = -2$ и $x = 5$.

Ответ: -2; 5.

6. Сократите дробь $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^3 - x^2 + 2x - 1}$.

Решение. $\dfrac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = \dfrac{(x^3 - 3x^2) + (x - 3)}{(2x^3 - x^2) + (2x - 1)} =$

$= \dfrac{x^2(x-3) + (x-3)}{x^2(2x-1) + (2x-1)} = \dfrac{(x-3)(x^2+1)}{(2x-1)(x^2+1)} = \dfrac{x-3}{2x-1}$.

Ответ: $\dfrac{x-3}{2x-1}$.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ x + y + xy = 9. \end{cases}$

Решение. Из уравнения $\sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}$ выразим x через y.

Обозначим $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = t$, $t > 0$. Уравнение примет вид

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow 2t^2-3t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2}, \\ t=2. \end{array}\right.$$

$t=-\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $t>0$.

Вернёмся к исходным переменным: $\sqrt{\frac{x}{y}}=2 \Leftrightarrow x=4y$.

Подставим $x=4y$ во второе уравнение системы. Получим

$$4y+y+4y^2=9 \Leftrightarrow 4y^2+5y-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=-2{,}25. \end{array}\right.$$

Так как $x=4y$, то при $y=1$ $x=4$; при $y=-2{,}25$ $x=-9$.

Следовательно, $(4;1)$ и $(-9;-2{,}25)$ — решения исходной системы.

Ответ: $(4;1)$, $(-9;-2{,}25)$.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy=1, \\ yz=2, \\ zx=8. \end{cases}$

Решение.

Способ 1.

$$\begin{cases} xy=1, \\ yz=2, \\ zx=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ \frac{z}{x}=2, \\ zx=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ z=2x, \\ 2x^2=8; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{x}, \\ z=2x, \\ \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right. \end{cases}$$

При $x=2$: $y=\frac{1}{2}$; $z=4$;

при $x=-2$: $y=-\frac{1}{2}$; $z=-4$.

Ответ: $\left(-2;-\frac{1}{2};-4\right)$, $\left(2;\frac{1}{2};4\right)$.

Способ 2. Перемножив уравнения, получим $x^2y^2z^2=16$; $xyz=\pm 4$.

1) Если $xyz=4$, то, разделив это уравнение поочерёдно на каждое из уравнений исходной системы, получим $\begin{cases} z=4, \\ x=2, \\ y=\frac{1}{2}. \end{cases}$

2) Если $xyz = -4$, то, разделив это уравнение поочерёдно на каждое из уравнений исходной системы, получим $\begin{cases} z = -4, \\ x = -2, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}; -4\right)$, $\left(2; \frac{1}{2}; 4\right)$.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $x^2 - 2 = x$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $x^6 - 14x^4 + 56x^2 - 64 = 0$.

Ответ: ________________.

3. Чему равно произведение всех корней уравнения $\sqrt{2 - x^2} \cdot (2x^2 - 5x + 3) = 0$?

1) -6 2) -3 3) -2 4) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

4. Решите уравнение $4x + 1 = \frac{9}{x - 1}$.

1) $x_1 = 2; x_2 = 2{,}5$ 2) $x_1 = 2; x_2 = -2{,}5$
3) $x_1 = -2; x_2 = 1{,}25$ 4) $x_1 = 2; x_2 = -1{,}25$

5. Решите уравнение $\frac{6}{x^2 + x - 6} + \frac{2}{2x^2 - 5x + 2} = \frac{x}{2x^2 + 5x - 3}$.

Ответ: ________________.

6. Сократите дробь $\frac{x^3 + 2x^2 - 2x + 3}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}$.

Ответ: ________________.

7. Найдите все решения уравнения $x^2 + \frac{2}{x^2} = 3$.

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{x + 3}{y + 2} - \frac{y + 4}{x - 1} = \frac{25}{2}, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. Решите уравнение $x^2 + 3x + 2 = 0$.

   Ответ: ________________.

2. Сократите дробь $\dfrac{4x^4 - 25x^2 + 36}{2x^3 + 3x^2 - 5x - 6}$.

   Ответ: ________________.

3. Найдите наибольший из корней уравнения $3x^2 - 5x = 2$.

   1) -2 2) $-\frac{1}{3}$ 3) $\frac{1}{3}$ 4) 2

4. Решите уравнение $\dfrac{3}{x^2 - 2x + 1} + \dfrac{2}{1 - x^2} = \dfrac{1}{x + 1}$.

   Ответ: ________________.

5. Найдите все рациональные корни уравнения
$x^3 + 3x^2 - 5x - 4 = 0$.

   Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $5x^3 + 3x^2 - 5x - 3 = 0$.

   Ответ: ________________.

7. Найдите координаты точек пересечения параболы
$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 7$ и прямой $3x + 2y - 1 = 0$.

   Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 29, \\ 3x - 7y = -29. \end{cases}$

   Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Решите уравнение $x^3 - 7x + 6 = 0$.

   Ответ: ________________.

2. Разделите многочлен $x^4 - x^3 + 3x^2 - 2x + 2$ на многочлен $x^2 + 2$.

   Ответ: ________________.

3. Найдите все рациональные корни уравнения
$\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} + \dfrac{x^2 + 2}{x - 2} = -2$.

   Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 3x + 1 = 0$.

Ответ: ______________ .

5. Решите уравнение $x - \dfrac{18}{x} - 7 = 0$.

Ответ: ______________ .

6. Решите уравнение $2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 5x = 0$.

Ответ: ______________ .

7. Найдите все натуральные корни уравнения

$$\frac{2x^2+1}{x+1} - \frac{3x+1}{x-1} = 2.$$

Ответ: ______________ .

8. Найдите целочисленные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy = 6, \\ xz = 10, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$$

Ответ: ______________ .

Вариант № 4

1. Решите уравнение $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$.

Ответ: ______________ .

2. Разделите многочлен $x^4 + x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ на многочлен $x^2 + 1$.

Ответ: ______________ .

3. Найдите все рациональные корни уравнения

$x^3 - 5x^2 + 4 = 0$.

Ответ: ______________ .

4. Найдите количество решений системы уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ 3xy + 2x = 2y. \end{cases}$

Ответ: ______________ .

5. Решите уравнение $\dfrac{8}{x-2} = x$.

Ответ: ______________ .

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b}} - \sqrt{\dfrac{b}{a}} = \dfrac{5}{6}, \\ a - b = 10. \end{cases}$$

Ответ: ______________ .

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -2. \end{cases}$

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} a^2 + 3ab = 4b^2, \\ a^2 + b^2 + 9 = 3ab. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Найдите корни уравнения $(x-2)^2 = 13 - 4x$.

Ответ: ________________.

2. Найдите многочлен наименьшей степени, среди корней которого есть числа 1, 2, 3 и коэффициент при старшей степени равен 1.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $(2x+1)^2 - (2x-2)(2+2x) = 17$.

Ответ: ________________.

4. Найдите произведение корней уравнения $x^4 + 8x^3 + 14x^2 + 8x + 1 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $(2x+1)(2x+3) - (2x-1)^2 = -22$.

Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $x^4 + x^3 - 11x^2 + x - 12 = 0$.

Ответ: ________________.

7. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3\sqrt{y} = \sqrt{x} + \sqrt{6}, \\ xy = 9. \end{cases}$

Ответ: ________________.

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x(y+2z) = 34, \\ x(z-y) = 2, \\ y(x-z) = -20. \end{cases}$

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Решите уравнение $x^2 = -2x + 3$.

Ответ: ________________ .

2. Разделите многочлен $2x^4 - 14x^3 + 25x^2 - 7x + 12$ на многочлен $2x^2 + 1$.

Ответ: ________________ .

3. Чему равно произведение всех различных корней уравнения $\sqrt{x^2 - 9} \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$?

1) -36 2) -18 3) -9 4) 6

4. Найдите все натуральные корни уравнения

$$\frac{3x^2 - 5}{x - 1} - \frac{7x + 6}{x + 2} = 2.$$

Ответ: ________________ .

5. Решите уравнение $\dfrac{2}{x^2 - x - 12} + \dfrac{6}{x^2 + 4x + 3} = \dfrac{1}{x + 3}$.

Ответ: ________________ .

6. Решите уравнение $(3x + 1)^2 = 40 + 9(x - 1)(x + 2)$.

Ответ: ________________ .

7. Найдите все решения уравнения $\dfrac{x^2 - 10}{x^2 + 2} + x^2 - 2 = 1$.

Ответ: ________________ .

8. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ xy = 1. \end{cases}$

Ответ: ________________ .

§ 20. Решение иррациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Основные сведения

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестное под знаком корня.

К простейшим иррациональным уравнениям относятся уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ и $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Основные способы решения иррационального уравнения.

I. Переход к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием.

1) Если обе части иррационального уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень и освободиться от радикалов, то получится уравнение, равносильное исходному.

При возведении уравнения в чётную степень получается уравнение, являющееся следствием исходного. Так как при возведении в чётную степень чисел, равных по абсолютной величине, но разных по знаку, получается один и тот же результат, то возможно появление посторонних решений уравнения, но невозможна потеря корней.

Так как могут появиться посторонние корни, то необходимо делать проверку, подставляя найденные значения неизвестной в первоначальное уравнение.

2) От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно перейти к равносильной ему системе:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x), \\ g(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

От иррационального уравнения вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ можно перейти к одной из равносильных ему систем:

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

или

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0. \end{cases}$$

Неравенство $g(x) \geqslant 0$ (или $f(x) \geqslant 0$) в этих системах выражает условие, при котором уравнение можно возводить в чётную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

II. Введение новой переменной.

Если в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины, то имеет смысл обозначить это выражение какой-нибудь новой переменной и попытаться решить уравнение сначала относительно введённой неизвестной, а затем уже найти исходную неизвестную.

III. Метод сведения к эквивалентным системам рациональных уравнений.

Уравнения вида $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = p$, где a, b, c, d — некоторые числа, часто удаётся решить при помощи введения двух вспомогательных неизвестных: $y = \sqrt{ax+b}$ и $z = \sqrt{cx+d}$, где $y, z \geqslant 0$ и последующего перехода к эквивалентной системе рациональных уравнений. Полученное уравнение будет содержать две неизвестных, которые зависят одна от другой посредством старой переменной x. С помощью преобразований можно получить систему двух уравнений относительно двух неизвестных y и z.

IV. Использование свойства монотонности функций.

Если уравнение имеет вид

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ возрастает (убывает), или

$$f(x) = g(x),$$

где $f(x)$ и $g(x)$ «встречно монотонны», то есть $f(x)$ возрастает, а $g(x)$ убывает или наоборот, то такое уравнение имеет не более одного корня. Если удаётся привести уравнение к такому виду и найти корень, то он и будет решением данного уравнения. Во многих случаях корень такого уравнения удобно находить подбором.

Демонстрационный вариант

1. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 5$.

Решение. $\sqrt{x-3} = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 25 \Leftrightarrow x = 28$.

Ответ: 28.

2. Найдите целые корни уравнения $\sqrt{5x+1} = x - 1$.

Решение. $\sqrt{5x+1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1 = (x-1)^2, \\ x - 1 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x+1 = x^2 - 2x + 1, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 7x = 0, \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 7, \end{array} \right. \\ x \geqslant 1; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 7.$

Ответ: 7.

3. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1$.

Решение. $\sqrt{2x-4} - \sqrt{x+5} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x-4} = 1 + \sqrt{x+5} \Rightarrow$

$2x - 4 = 1 + 2\sqrt{x+5} + x + 5 \Rightarrow 2\sqrt{x+5} = x - 10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 20 = x^2 - 20x + 100, \\ x - 10 \geqslant 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 24x + 80 = 0, \\ x \geqslant 10; \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 20, \\ x = 4, \end{array} \right. \\ x \geqslant 10; \end{cases} \Leftrightarrow x = 20.$

Выполненные преобразования равносильны, значит, $x = 20$ — корень исходного уравнения.

Ответ: 20.

4. Решите уравнение $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$.

Решение. Обозначим $\sqrt{x} = t,\ t \geqslant 0$.
Уравнение примет вид

$t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3. \end{array} \right.$

$t = -1$ не удовлетворяет условию $t \geqslant 0$.

Вернёмся к исходной переменной: $\sqrt{x} = 3 \Rightarrow x = 9$.

Ответ: 9.

5. Решите уравнение $|2x + 14| = 12$.

Решение. $|2x + 14| = 12 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x + 14 = 12, \\ 2x + 14 = -12; \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -13. \end{array} \right.$

Ответ: $-13; -1$.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $|x+1|+|x-5|=20$.

Решение. 1) Найдём нули выражений, стоящих под знаком модуля.

$x+1=0 \Rightarrow x=-1;$

$x-5=0 \Rightarrow x=5.$

2) Решим уравнение на промежутках $(-\infty;-1)$, $[-1;5]$ и $(5;+\infty)$.

а) $\begin{cases} x<-1, \\ -x-1+5-x=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ x=-8 \end{cases} \Leftrightarrow x=-8.$

б) $\begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 5, \\ x+1+5-x=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\leqslant x\leqslant 5, \\ 0\cdot x=14 \end{cases} \Rightarrow$ решений нет.

в) $\begin{cases} x>5, \\ x+1+x-5=20; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5, \\ x=12 \end{cases} \Leftrightarrow x=12.$

Разность между наибольшим и наименьшим корнями исходного уравнения $12-(-8)=20$.

Ответ: 20.

7. Найдите корни уравнения $|x^2+2x-3|=2x+6$, принадлежащие промежутку $(-3;5]$.

Решение. Решим уравнение графически. Построим графики функций $y=|x^2+2x-3|$ и $y=2x+6$.

1. Графиком функции $y=x^2+2x-3$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a=1>0$), вершина в точке с координатами $(x_0;y(x_0))$, где $x_0=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2}=-1,\ y(x_0)=y(-1)=1-2-3=-4$ (см. рис. 149).

Следовательно, $(-1;-4)$ — координаты вершины параболы. Нули функции: $x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=1. \end{array}\right.$

2. Отразим часть параболы, расположенную ниже оси Ox, относительно этой оси.

3. Графиком функции $y=2x+6$ является прямая, проходящая через точки с координатами $(0;6)$ и $(-3;0)$.

4. Построенные графики имеют две общие точки, абсциссы которых $x=-1$ и $x=3$ принадлежат промежутку $(-3;5]$.

Проверка.

1) При подстановке значения $x=-1$ в исходное уравнение получим $|(-1)^2+2\cdot(-1)-3|=4,\ 2\cdot(-1)+6=4.$

$4=4$ — верно. Следовательно, $x=-1$ — корень исходного уравнения.

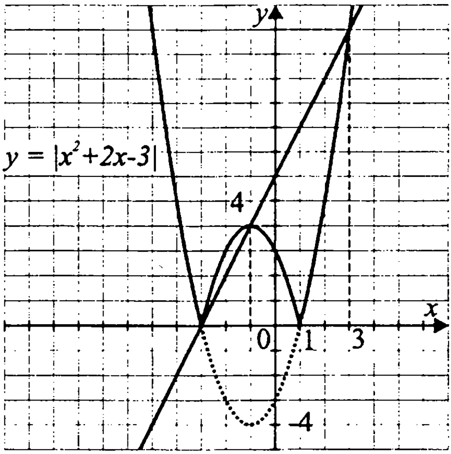


Рис. 149.

2) При подстановке значения $x = 3$, получим $|3^2 + 2\cdot 3 - 3| = 12$, $2\cdot 3 + 6 = 12$.

$12 = 12$ — верно. Следовательно, $x = 3$ — корень исходного уравнения. На промежутке $(-3; 5]$ заданное уравнение имеет корни $x = -1$, $x = 3$.

Ответ: $-1; 3$.

8. Найдите количество корней уравнения
$\sqrt{18x+1} = 7 - |6 - 3x|$.

Решение. Так как $\sqrt{18x+1} \geqslant 0$, то $7 - |6-3x| \geqslant 0 \Leftrightarrow |6-3x| \leqslant 7$

$$-7 \leqslant 6 - 3x \leqslant 7 \Leftrightarrow -13 \leqslant -3x \leqslant 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}.$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 18x + 1 = 49 - 14|6-3x| + 36 - 36x + 9x^2, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14|6-3x| = 9x^2 - 54x + 84, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 14|2-x| = 3x^2 - 18x + 28, \\ -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{13}{3}. \end{cases}$$

Решим полученную систему на промежутках $\left[-\frac{1}{3}; 2\right]$ и $\left(2; \frac{13}{3}\right]$.

1) $\begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2, \\ 28 - 14x = 3x^2 - 18x + 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x^2 - 4x = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$

$$2)\ \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ 14x - 28 = 3x^2 - 18x + 28; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ 3x^2 - 32x + 56 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ x_{1,2} = \dfrac{16 \pm \sqrt{256 - 168}}{3}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x \leqslant \dfrac{13}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{16 + \sqrt{88}}{3}, \\ x = \dfrac{16 - \sqrt{88}}{3}. \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{16 - \sqrt{88}}{3}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 3.

Вариант № 1

1. Решите уравнение $\sqrt{x+5} - \sqrt{2x-4} = 1$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 + x} = 2 - x$.

Ответ: ________________.

3. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{1-x} \cdot (x^4 - 5x^2 + 4) = 0$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

4. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $1 + \sqrt{3x^2 - 2} = 2x$.

1) $[-1; 2]$ 2) $[0; 3)$ 3) $[1; 4)$ 4) $[5; 10]$

5. Решите уравнение $\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$.

Ответ: ________________.

6. Пусть x_0 — наименьший корень уравнения $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$. Найдите $2 \cdot x_0 - 1$.

1) -3 2) -11 3) 9 4) уравнение корней не имеет

7. Найдите все целые корни уравнения, меньшие 3.
$\dfrac{|4-x^2|}{|x+2|} = |2-|x||.$

   Ответ: ________________ .

8. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2+\sqrt{3x^2-2}} = 2.$

   Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Решите уравнение $x-3=\sqrt{9-x}.$

   Ответ: ________________ .

2. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 3-x.$

   Ответ: ________________ .

3. Чему равно произведение всех различных корней уравнения
$\sqrt{x^2-9}\cdot(x^2-4x+4)=0$?

   1) -36 2) -18 3) -9 4) 6

4. Решите уравнение $6(\sqrt{x})^2-12=4x.$

   Ответ: ________________ .

5. Найдите утроенное произведение корней уравнения
$\sqrt{(3-x)^2} = \sqrt{(4x-1)^2}.$

   Ответ: ________________ .

6. Найдите наименьший корень уравнения
$\left(2-\sqrt{3x-4}\right)\cdot\left(\sqrt{4x-1}-2\right)=0.$

   1) $\dfrac{8}{3}$ 2) $\dfrac{1}{4}$ 3) 2 4) $\dfrac{5}{4}$

7. Решите уравнение $|2-x^2|=3.$

   Ответ: ________________ .

8. Решите уравнение $\sqrt{12x^2+4}=6x+10.$

   Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+4}=7.$

   Ответ: ________________ .

2. Найдите все натуральные корни уравнения $\sqrt{5x+16}=x+2.$

   Ответ: ________________ .

3. Найдите сумму корней уравнения $\sqrt{3x+13} - \sqrt{x-8} = 5$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $x + 3\sqrt{x} - 28 = 0$.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $|5x+12| = 8$.

Ответ: ________________.

6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения $|3x-4| - |6-2x| = 0$.

Ответ: ________________.

7. Решите уравнение $|2 - x^2| = 3$.

Ответ: ________________.

8. Найдите наибольший целочисленный корень уравнения
$33 - |6-3x| = \sqrt{x-3}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+5} = 3$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $\sqrt{4x-3} = 2x-3$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $x + 2\sqrt{x} = 8$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $|2x+3| = 5$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $|x+1| = 3$

Ответ: ________________.

6. Решите уравнение $|2x-5| - |3x-8| = 0$.
Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их сумму.

Ответ: ________________.

7. Укажите все целочисленные корни уравнения $\sqrt{x+3} = 3|x-2| - 1$.

Ответ: ________________.

8. Укажите количество рациональных корней уравнения $\sqrt{x^2+6x-26} - 1 = 2|3-x|$.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Решите уравнение $\sqrt{7-2x} - 3 = 0$.

Ответ: ________________.

2. Найдите сумму корней уравнения $2x + 1 = \sqrt{61-10x}$.

Ответ: ________________.

3. Решите уравнение $x + 3\sqrt{x+3} - 37 = 0$.

Ответ: ________________.

4. Решите уравнение $\sqrt{3x+4} - x = \sqrt{x+2} + 1$. Если уравнение имеет несколько корней, то в ответе запишите их произведение.

Ответ: ________________.

5. Решите уравнение $|7 - 13x| = 6$.

Ответ: ________________.

6. Найдите сумму корней уравнения $||x+3| - 1| = 1$.

Ответ: ________________.

7. Решите уравнение $|x-3| - |x+5| = 2$.

Ответ: ________________.

8. Решите уравнение $4\sqrt{x-1} + 5|x+2| = 24$.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Найдите корни уравнения $|x^2 - 7x + 10| = 5x - 25$, принадлежащие промежутку $(5; 7]$.

Ответ: ________________.

2. Решите уравнение $2x - \sqrt{x^4 - 45} = 0$.

Ответ: ________________.

3. Сколько различных корней имеет уравнение $\sqrt{x-2} \cdot (x^6 - 8x^3 + 7) = 0$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

4. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{2x^2 - 7x + 21} - x = 1$.

1) $(-\infty; -5)$ 2) $[0; 5)$ 3) $(3{,}5; 6]$ 4) $(10; 15)$

5. Решите уравнение $\sqrt{5x+4} - \sqrt{x+3} = 1$.

Ответ: ________________ .

6. Пусть x_0 — неположительный корень уравнения $\sqrt{1 + 4x - x^2} = x - 1$. Найдите $3 \cdot x_0 + 2$.

1) 2 2) -7
3) -1 4) неположительных корней нет

7. Найдите сумму всех целых корней уравнения, больших -10.

$$\frac{|x^2 - 9|}{||x| + 3|} = |x + 3|.$$

Ответ: ________________ .

8. Найдите произведение корней уравнения $\sqrt{x^2 - \sqrt{3x^2 - 2}} = 2$.

Ответ: ________________ .

§ 21. Текстовые задачи

Демонстрационный вариант

1. Площадь прямоугольного треугольника равна 27 см^2, а один из катетов на 3 см больше другого. Найдите длину большего катета (в см).

Решение. Пусть x см — длина большего катета, тогда $(x-3)$ см — длина меньшего катета, а $\frac{1}{2}x(x-3)$ см^2 — площадь треугольника.

По условию задачи площадь треугольника равна 27 см^2. Составим уравнение: $\frac{1}{2}x(x-3)=27$, $x^2-3x-54=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=-6. \end{array}\right.$

Учитывая, что длина катета — положительное число, условию задачи удовлетворяет $x=9$. То есть длина большего катета 9 см.

Ответ: 9.

2. В каждом из двух бидонов было одинаковое количество молока. После того как из первого бидона во второй перелили 20 л молока, в нём осталось втрое меньше молока, чем стало во втором бидоне. Сколько литров молока было в каждом бидоне первоначально?

Решение. Пусть первоначально в каждом бидоне было x л молока. После того как молоко перелили из первого бидона во второй, в первом бидоне осталось $(x-20)$ л молока, а во втором стало $(x+20)$ л. Зная, что в первом бидоне осталось молока в 3 раза меньше, чем стало во втором, составим уравнение:

$3(x-20)=x+20,\ 3x-x=20+60,\ x=40.$

Значит, первоначально в каждом бидоне было по 40 л молока.

Ответ: 40.

3. С трёх грядок собрали 160 кг огурцов. С первой грядки собрали в 3 раза больше, чем со второй, а с третьей — на 54 кг больше, чем со второй. Сколько килограммов огурцов собрали с первой грядки?

Решение. Пусть со второй грядки собрали x кг огурцов.
Тогда $3x$ кг — собрали с первой грядки, а $(x+54)$ кг — собрали с третьей грядки. По условию задачи с трёх грядок собрали 160 кг. Составим уравнение:

$3x+x+x+54=160,\ 5x=106,\ x=21{,}2.$

Значит, 21,2 кг огурцов собрали со второй грядки; $21{,}2\cdot 3=63{,}6$ кг — собрали с первой грядки.

Ответ: 63,6.

4. Разность двух натуральных чисел равна 1. Сумма этих чисел меньше их произведения на 19. Найдите эти числа.

Решение. Пусть x — первое число, y — второе число. Тогда $x-y$ — разность чисел, $x+y$ — сумма, xy — произведение.

Зная, что разность чисел равна 1, а их произведение больше суммы на 19, составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ xy-(x+y)=19; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x(x-1)-(x+x-1)=19; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ x^2-3x-18=0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-1, \\ \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=6. \end{array}\right. \end{cases}$$

По условию числа натуральные, значит, $x=6$, $y=5$.

Ответ: 6; 5.

5. Две гири и три гантели вместе весили 47 кг, а три гири тяжелее 6 гантелей на 18 кг. Сколько килограммов весит гиря и сколько — гантель?

Решение. Пусть x кг весит гиря ($x>0$), y кг весит гантель ($y>0$). Тогда $2x$ кг весят 2 гири, $3y$ кг весят 3 гантели; $(2x+3y)$ кг весят 2 гири и 3 гантели, что по условию задачи составляет 47 кг.

Следовательно, 1-е уравнение: $2x+3y=47$.

Так как $3x$ кг весят 3 гири, $6y$ кг весят 6 гантелей, то $(3x-6y)$ кг — разность веса 3-х гирь и 6-ти гантелей, что по условию задачи составляет 18 кг.

Следовательно, 2-е уравнение: $3x-6y=18$, или $x-2y=6$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x+3y=47, \\ x-2y=6; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=47, \\ -2x+4y=-12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=47, \\ 7y=35; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y=47, \\ y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3\cdot 5=47, \\ y=5; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=16, \\ y=5. \end{cases}$$

Таким образом, 16 кг весит гиря, 5 кг — гантель.

Ответ: 16; 5.

6. Моторная лодка прошла по течению реки 12 км, а против течения — 7 км, затратив на путь по течению на 1 час меньше, чем путь против течения. Найдите скорость течения реки (в км/ч), если собственная скорость лодки 6 км/ч.

Решение. Пусть x км/ч — скорость течения реки, $x \in (0; 6)$.

	v (км/ч)	t (ч)	S (км)
по течению	$6+x$	$\frac{12}{6+x}$	12
против течения	$6-x$	$\frac{7}{6-x}$	7

По условию задачи на путь по течению лодка затратила на 1 ч меньше, чем на путь против течения. Составим уравнение:

$$\frac{7}{6-x}-\frac{12}{6+x}=1 \Leftrightarrow 7x+42-72+12x=36-x^2 \Leftrightarrow x^2+19x-66=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-22. \end{array}\right.$$

$x=-22$ не удовлетворяет условию, так как $x \in (0; 6)$.

Следовательно, скорость течения реки — 3 км/ч.

Ответ: 3.

7. Расстояние в 30 км один из двух лыжников прошёл на 20 минут быстрее другого. Какова скорость каждого лыжника (в км/ч), если известно, что расстояние в 45 км первый лыжник проходит за то же время, за которое второй лыжник проходит 54 км?

Решение. Пусть x км/ч — скорость первого лыжника ($x > 0$), y км/ч — скорость второго ($y > 0$). Тогда 30 км первый лыжник прошёл за $\frac{30}{x}$ ч, а второй — за $\frac{30}{y}$ ч. Первый лыжник прошёл это расстояние на $\left(\frac{30}{x}-\frac{30}{y}\right)$ ч быстрее, чем второй, что по условию задачи составляет $20 \text{ мин} = \frac{20}{60} \text{ ч} = \frac{1}{3}$ ч.

Следовательно, первое уравнение: $\frac{30}{x}-\frac{30}{y}=\frac{1}{3}$.

Расстояние в 45 км первый лыжник проходит за $\frac{45}{x}$ ч, а второй лыжник 54 км проходит за $\frac{54}{y}$ ч. По условию задачи лыжники прошли эти расстояния за одно и то же время.

Следовательно, второе уравнение: $\frac{45}{x}=\frac{54}{y}$, или $\frac{5}{x}=\frac{6}{y}$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{30}{x} - \dfrac{30}{y} = \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{5}{x} = \dfrac{6}{y}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 90y - 90x = xy, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 90 \cdot 1{,}2x - 90x = 1{,}2x^2, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}2x^2 - 18x = 0, \\ y = 1{,}2x; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 15, \end{array} \right. \\ y = 1{,}2x. \end{cases}$$

$x = 0$ не удовлетворяет условию $x > 0$, значит, $x = 15$, $y = 15 \cdot 1{,}2 = 18$. Таким образом, скорость первого лыжника 15 км/ч, скорость второго — 18 км/ч.

Ответ: 15; 18.

8. Двое рабочих вместе выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал вдвое быстрее, а второй — вдвое медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней может выполнить всю работу первый рабочий, трудясь самостоятельно?

Решение. Примем объём работы за единицу. Пусть за x дней выполнит всю работу первый рабочий ($x > 0$), за y дней — второй ($y > 0$).

$\dfrac{1}{x}$ — производительность первого рабочего,

$\dfrac{1}{y}$ — производительность второго рабочего,

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ — производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполняют всю работу за 5 дней, значит, общая производительность — $\dfrac{1}{5}$.

Следовательно, первое уравнение: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$.

$\dfrac{2}{x}$ — увеличенная вдвое производительность первого рабочего,

$\dfrac{1}{2y}$ — уменьшенная вдвое производительность второго рабочего,

$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{2y}$ — изменённая производительность двух рабочих вместе.

По условию рабочие вместе выполнили бы всю работу за 4 дня, значит, $\frac{1}{4}$ — была бы их общая производительность.

Следовательно, второе уравнение: $\frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}$.

Решение задачи сводится к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = -\frac{2}{5}, \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{2y} = \frac{1}{4}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ -\frac{3}{2y} = -\frac{3}{20}; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{5}, \\ y = 10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \\ y = 10. \end{cases}$$

Таким образом, первый рабочий может выполнить всю работу за 10 дней.

Ответ: 10.

Вариант № 1

1. Из корзины взяли 9 яблок, затем треть остатка и ещё 10% всех яблок. После этого в корзине осталась половина первоначального числа яблок. Сколько яблок было в корзине?

Ответ: ________________.

2. Средний рост девочек того же возраста, что и Тома, равен 150 см. Рост Томы на 8% больше среднего. Какой рост у Томы?

1) 138 2) 139 3) 162 4) 163

3. В угловом секторе стадиона в первом ряду 7 мест, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в 26-ом ряду?

Ответ: ________________.

4. Автобус ехал по городу со скоростью 50 км/ч некоторое время. Затем он ехал в 2 раза быстрее по междугородней трассе в соседний город, на что времени у него ушло в 3 раза больше того, что он ехал по городу. На весь путь он потратил час. Сколько километров проехал автобус за этот час?

Ответ: ________________.

5. В куске сплава меди и цинка количество меди увеличили на 40%, а количество цинка уменьшили на 40%. В результате общая масса куска сплава увеличилась на 20%. Определите процентное содержание меди и цинка в первоначальном куске сплава.

Ответ: ________________ .

6. Автобус ехал по трассе от пункта A до пункта B со скоростью 80 км/ч. Выехав обратно, он 30 км ехал со скоростью, вдвое меньшей первоначальной. Затем он увеличил скорость на 50 км/ч и доехал до пункта A, не меняя более скорости. Найдите расстояние (в км) от пункта A до пункта B, если на обратный путь водитель затратил на $\frac{5}{18}$ часа меньше.

Ответ: ________________ .

7. В двух группах 50 учащихся. Когда число учащихся первой группы уменьшили на 20%, а второй группы увеличили на 40%, то в первой группе стало на 4 ученика меньше, чем во второй. Сколько учащихся было в каждой группе первоначально?

Ответ: ________________ .

8. В корзине были яблоки. Сначала из неё взяли половину яблок, затем $\frac{1}{3}$ оставшихся яблок и ещё 4 яблока, после чего осталось 12 яблок. Сколько яблок было в корзине первоначально?

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Одна из сторон прямоугольника на 4 больше другой. Найдите стороны прямоугольника, если его площадь равна 96.

Ответ: ________________ .

2. Весной на рынке стоимость огурцов каждую неделю снижается на 10% от предыдущей стоимости. В начале недели цена килограмма огурцов была равна 50 руб. Сколько будет стоить килограмм огурцов через 17 дней?

1) 5 2) 9,5 3) 40,5 4) 45

3. В первый день мастер сделал 25 деталей. В каждый следующий день он делал на 3 детали больше, чем в предыдущий. Укажите количество деталей, сделанных мастером в k-ый день.

Ответ: ________________ .

4. На клумбе растут ромашки, тюльпаны и розы. Причём ромашек в 3 раза больше, чем тюльпанов, а роз на 25 меньше, чем ромашек. Сколько ромашек растёт на клумбе, если общее количество цветов равно 59?

Ответ: ________________ .

5. Сплав меди с цинком, содержащий 5 кг цинка, сплавлен с 15 кг цинка. В результате содержание меди в сплаве понизилось по сравнению с её первоначальным содержанием в сплаве на 30%. Какой могла быть первоначальная масса сплава (в кг)?

Ответ: ________________ .

6. Из гавани вышли три катера с интервалом 1 ч. Скорость первого равна 30 км/ч, второго — 40 км/ч. Известно, что после того, как третий догонит второго за некоторое время, потребуется ещё столько же времени, чтобы второй катер догнал первый. Найдите скорость третьего катера (в км/ч).

Ответ: ________________ .

7. Две бригады, работая вместе, вспахали поле за 8 ч. За сколько часов может вспахать поле каждая бригада, работая самостоятельно, если второй бригаде на это необходимо на 12 ч больше, чем первой?

Ответ: ________________ .

8. Сумма цифр двузначного числа равна 12. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Найдите исходное число.

Ответ: ________________ .

Вариант № 3

1. Одна из сторон прямоугольника на 5 см меньше другой. Найдите стороны прямоугольника (в см), если площадь прямоугольника равна площади квадрата со стороной 6 см.

Ответ: ________________ .

2. В двух пачках было одинаковое количество тетрадей. Когда из первой пачки переложили во вторую 18 тетрадей, то во второй стало в 4 раза больше тетрадей, чем в первой. Сколько тетрадей было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________ .

3. В корзине лежали яблоки, груши и апельсины, всего 59 штук. Яблок было в 3 раза больше, чем груш, а апельсинов — на 25 штук меньше, чем яблок. Сколько яблок было в корзине?

Ответ: ________________ .

4. Разность двух целых чисел равна 12. Сумма этих чисел, сложенная с частным от деления большего числа на меньшее, равна 24. Найдите эти числа.

Ответ: ________________ .

5. На один костюм и четыре платья пошло 11 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 м. Сколько метров ткани потребуется на одно платье и на один костюм?

Ответ: ________________.

6. Расстояние между пунктами А и Б по реке 24 км. Катер проплыл от пункта А до пункта Б и вернулся обратно, затратив на весь путь 3,5 часа. Найдите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки 2 км/ч.

Ответ: ________________.

7. Расстояние, равное 960 км, первый автомобиль проходит на 2 часа быстрее второго. За время, которое требуется первому автомобилю на прохождение 60 км, второй успевает пройти 50 км. Найдите скорость каждого автомобиля (в км/ч).

Ответ: ________________.

8. Насос может выкачать из бассейна $\frac{2}{3}$ воды за $7\frac{1}{2}$ мин. Проработав 9 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса в бассейне осталось ещё 20 м^3 воды.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Коробок конфет на 6 меньше, чем конфет в каждой коробке. Сколько всего коробок конфет, если всего в них находится 135 конфет?

Ответ: ________________.

2. В двух пачках было одинаковое количество книг. Из первой пачки переложили во вторую 20 книг, после чего книг во второй пачке стало в 3 раза больше, чем в первой. Сколько книг было в каждой пачке первоначально?

Ответ: ________________.

3. После посещения рынка у хозяйки в сумке были яблоки, мандарины и апельсины. Всего 56 штук. Яблок было в 2 раза больше, чем апельсинов, а мандаринов — на 8 штук больше, чем апельсинов. Сколько штук мандаринов в сумке у хозяйки?

Ответ: ________________.

4. Дано двузначное число. Разность между его первой и второй цифрами равна 3, а их сумма равна 7. Найдите это число.

Ответ: ________________.

5. На два костюма и три платья пошло 12 м ткани, а на три таких же костюма и два таких же платья — 13 метров ткани. Сколько метров ткани потребуется на два платья и один костюм?

Ответ: ________________.

6. Катер прошёл 12 км по течению реки и 2 км против течения. На весь путь он потратил 1 час 20 мин. Определите собственную скорость катера (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: ________________.

7. Расстояние, равное 630 км, автомобиль проезжает на 2 часа быстрее мотоцикла. За время, которое потребуется автомобилю на прохождение 45 км, мотоцикл успеет проехать 35 км. Найдите скорость мотоцикла (в км/ч).

Ответ: ________________.

8. Насос может выкачать из бассейна треть воды за 15 мин. Проработав 18 мин, насос остановился. Найдите вместимость бассейна (в м^3), если после остановки насоса в бассейне осталось ещё 60 м^3 воды.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. В двух коробках лежит одинаковое количество пачек печенья. Если из первой коробки вынуть 25 пачек, а из второй — 10, то в первой коробке останется в 2 раза меньше пачек, чем во второй. Сколько пачек печенья было в каждой коробке первоначально?

Ответ: ________________.

2. Бабушка слепила вареники с картошкой и с творогом. Причём вареников с творогом было на 12 штук больше, чем вареников с картошкой. Сколько было вареников с картошкой, если они составляли 80% от вареников с творогом?

Ответ: ________________.

3. Книг по математике на 5 больше, чем книг по физике, которые составляют 40% от общего числа книг по математике и физике. Сколько всего книг?

Ответ: ________________.

4. Двузначное число в 5 раз больше суммы своих цифр и в 2,25 раз больше их произведения. Найдите это число.

Ответ: ________________.

17. Зак. № 199

5. На одну и ту же сумму денег можно купить 3 карандаша и 4 резинки или 5 карандашей и одну резинку. Сколько процентов составляет стоимость четырёх карандашей от общей стоимости четырёх карандашей и девяти резинок?

Ответ: ________________ .

6. От пристани вниз по реке отправляется плот. Через два часа от той же пристани отправляется катер, собственная скорость которого в 3 раза больше скорости течения. Сколько часов потребуется катеру, чтобы догнать плот и вернуться к пристани?

Ответ: ________________ .

7. Из пункта A в пункт B выезжает автобус. Через час из пункта A выезжает второй автобус, ещё через три часа он догоняет первый и приезжает в B на час раньше первого. Через сколько часов они встретятся, если будут ехать из A и из B соответственно навстречу друг другу?

Ответ: ________________ .

8. Первоначально было 5 л раствора соли, потом к нему добавили 2 л другого раствора соли, после чего концентрация соли понизилась на 2% по сравнению с первоначальной. Найдите, на сколько процентов концентрация первого раствора больше концентрации второго.

Ответ: ________________ .

Вариант № 6

1. Мотоциклист догоняет велосипедиста. Сейчас расстояние между ними составляет 12 км. Скорость мотоциклиста в 3,5 раза больше скорости велосипедиста. Найдите расстояние между велосипедистом и мотоциклистом (в км) через 3 часа, если известно, что мотоциклист догонит велосипедиста через $\frac{2}{5}$ часа.

Ответ: ________________ .

2. Коза Зоя даёт на 30% больше молока, чем коза Белка. Сколько молока в месяц даёт Белка, если Зоя даёт 65 л в месяц?

1) 19,5 2) 84,5 3) 50 4) 45,5

3. В бильярдной пирамиде (см. рис. 150) пять рядов и 15 шаров. Сколько шаров в подобной пирамиде с 39 рядами?

Ответ: ________________ .

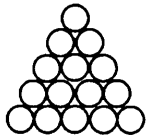


Рис. 150.

4. Сплав меди, олова и свинца весит 105 кг. При этом меди в сплаве на 15 кг меньше, чем олова, а свинца в 2,5 раза больше, чем меди. Сколько килограммов свинца содержит сплав?

Ответ: ________________.

5. Смешали 30%-ный и 50%-ный растворы азотной кислоты и получили 45%-ный раствор. Найдите отношение массы 30%-го раствора к массе 50%-го раствора, взятых первоначально.

Ответ: ________________.

6. Моторная лодка прошла 39 км по течению реки и 28 км против течения реки за то же время, за которое она могла пройти по озеру 70 км. Найдите скорость лодки в стоячей воде (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: ________________.

7. Первый насос перекачивает 90 м^3 воды на 1 час быстрее, чем второй 100 м^3. Сколько воды (в м^3) ежечасно перекачивает каждый насос, если первый перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем второй?

Ответ: ________________.

8. Кочан капусты на $\frac{4}{5}$ кг тяжелее $\frac{4}{5}$ этого же кочана. Какова масса кочана капусты (в кг)?

Ответ: ________________.

18. Зак. № 199

§ 22. Задания, содержащие параметр

Основные сведения

Пусть дано уравнение вида $f(a,x) = g(a,x)$, где a, x — переменные величины.

Переменная a, которая при решении этого уравнения считается постоянной, называется **параметром**, а само уравнение — **уравнением, содержащим параметр**.

Решить уравнение (с переменной x и параметром a) значит на множестве действительных чисел решить семейство уравнений, получаемых из данного при всех допустимых значениях параметра a.

Многие уравнения с параметром могут быть решены с помощью следующего алгоритма.

1) Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a, исходя из того, что функции $f(a,x)$ и $g(a,x)$ имеют смысл.

2) Определить формальные решения уравнения, записываемые без учёта ограничений. Если при решении возникают контрольные значения параметра, то их наносят на числовую ось Oa. Эти значения разбивают область допустимых значений параметра на подмножества. На каждом из подмножеств решают заданное уравнение.

3) Исключить те значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям.

4) На числовую ось Oa добавить значения параметра, найденные в п.3). Для каждого из промежутков на оси Oa записать все полученные решения в зависимости от значений параметра a.

5) Записать ответ, то есть решения в зависимости от значений параметра a.

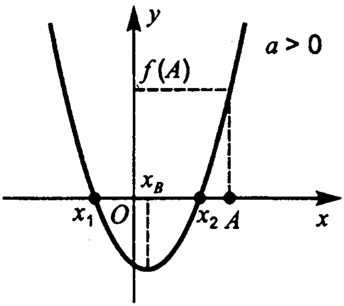
При решении заданий с параметрами часто встречаются задачи (или приводящие к ним) о расположении корней квадратного уравнения.

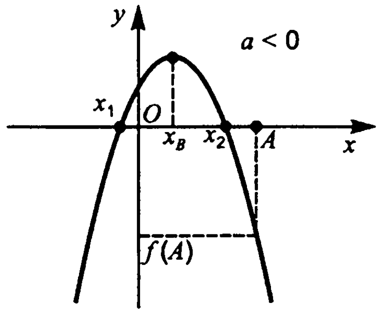
Пусть x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ — корни квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$, у которого $D = b^2 - 4ac$, $a \neq 0$, $x_B = -\dfrac{b}{2a}$ и даны некоторые точки A и B оси Ox.

Утверждение 1. Оба корня меньше числа A, то есть $x_1 < A$ и $x_2 < A$ тогда и только тогда, когда

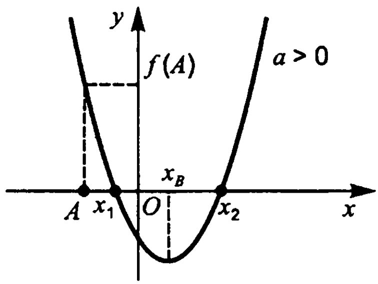
$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_B < A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_B < A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

Графически эти условия можно представить следующим образом:





Если мы не будем учитывать третье неравенство $x_B < A$, то может получиться такая ситуация,



при которой выполняются все остальные неравенства системы, но не выполняется условие задачи.

Утверждение 2. Корни лежат по разные стороны от числа A, то есть $x_1 < A < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0. \end{cases}$$

Утверждение 3. Оба корня больше числа A, то есть $x_1 > A$ и $x_2 > A$, тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ x_B > A, \\ f(A) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ x_B > A, \\ f(A) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 4. Оба корня лежат между точками A и B, то есть $A < x_1 < B$ и $A < x_2 < B$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} D > 0, \\ a > 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} D > 0, \\ a < 0, \\ A < x_B < B, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0. \end{cases}$$

Утверждение 5. Корни лежат по разные стороны от отрезка $[A; B]$, то есть $x_1 < A < B < x_2$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a > 0, \\ f(A) < 0, \\ f(B) < 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} a < 0, \\ f(A) > 0, \\ f(B) > 0. \end{cases}$$

Демонстрационный вариант

1. При каком положительном значении a функция $y = -2x^2 + 4ax + 7$ имеет наибольшее значение, равное 15?

Решение. Графиком функции $y = -2x^2 + 4ax + 7$ является парабола, ветви которой направлены вниз ($a = -2 < 0$), следовательно, наибольшее значение функция y принимает в вершине параболы.

Задача сводится к решению уравнения $y(x_0) = 15$, где x_0 — абсцисса вершины, $x_0 = \dfrac{-4a}{2 \cdot (-2)} = a$.

$-2a^2 + 4a \cdot a + 7 = 15 \Leftrightarrow 2a^2 = 8 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow |a| = 2.$

По условию $a > 0$, значит, $a = 2$.

Ответ: 2.

2. При каких значениях k число 2 находится между корнями уравнения $2x^2 - \dfrac{1}{2}x + (k-3)(k+5) = 0$?

Решение. Графиком функции $y = 2x^2 - \dfrac{1}{2}x + (k-3)(k+5)$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 2 > 0$). Число 2 находится между корнями x_1 и x_2, если $y(2) < 0$ (см. рис. 151).

$2 \cdot 2^2 - \dfrac{1}{2} \cdot 2 + k^2 + 2k - 15 < 0,$

$k^2 + 2k - 8 < 0.$

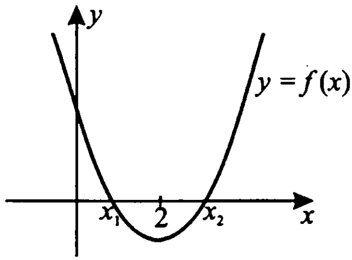


Рис. 151.

$(k+4)(k-2) < 0,\ k \in (-4; 2).$

Ответ: $(-4; 2)$.

3. При каких значениях k число 3 находится между корнями уравнения $x^2 + x + (k-1)(k+7) = 0$?

Решение. Графиком квадратичной функции $y = x^2 + x + (k-1)(k+7)$ является парабола, ветви которой направлены вверх ($a = 1 > 0$). Решение задачи сводится к решению неравенства $y(3) < 0$.

$3^2 + 3 + k^2 + 6k - 7 < 0,$

$(k+1)(k+5) < 0,\ -5 < k < -1.$

Ответ: $(-5; -1)$.

4. Найдите все значения a, при которых множество значений функции $y = x^2 - (2a-1)x + 3a$ совпадает с промежутком $[1{,}5; +\infty)$.

Решение. Графиком заданной функции y является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$. Ветви параболы направлены вверх. Множеством значений заданной функции является промежуток $[y(x_0); +\infty)$.

Решение задачи сводится к решению уравнения $y(x_0) = 1{,}5$.

Так как $x_0 = \dfrac{2a-1}{2}$, то

$$y(x_0) = \left(\frac{2a-1}{2}\right)^2 - \frac{(2a-1)^2}{2} + 3a = -\frac{(2a-1)^2}{4} + 3a =$$

$$= \frac{-4a^2 + 4a - 1 + 12a}{4} = \frac{-4a^2 + 16a - 1}{4} = \frac{3}{2}.$$

$$4a^2 - 16a + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0{,}5 \\ 3{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: 0,5; 3,5.

5. Найдите значения параметров k и b, при которых прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2 + bx$, и абсцисса точки касания равна 2.

Решение. Прямая касается параболы, следовательно, уравнение $kx + b = x^2 + bx$ имеет единственный корень, то есть дискриминант уравнения $x^2 + (b - k)x - b = 0$ равен нулю.

$D = (b - k)^2 + 4b = 0$. По условию абсцисса точки касания равна 2, значит, $x = 2$ — корень уравнения. То есть $4 + 2(b - k) - b = 0 \Leftrightarrow b = 2k - 4$. Найдём k и b, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} (b-k)^2 + 4b = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k-4)^2 + 4(2k-4) = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 8k + 16 + 8k - 16 = 0, \\ b = 2k - 4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0, \\ b = -4. \end{cases}$$

Ответ: $k = 0$, $b = -4$.

6. Найдите множество значений параметра l, при которых число 2 находится между корнями уравнения $9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) = 3$.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) - 3 = 0$.

Если квадратный трёхчлен, стоящий в левой части равенства, имеет корни, то решение задачи сводится к решению неравенства $y(2) < 0$, где $y = 9x^2 - 6x - (l - 2)(l + 2) - 3$.

$y(2) = 9 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 - l^2 + 4 - 3 = 25 - l^2$; $25 - l^2 < 0$; $|l| > 5$; $l \in (-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5) \cup (5; +\infty)$.

7. Определите количество корней уравнения $|x^2 - 6x + 4| = a$ при всех неотрицательных значениях параметра a.

Решение. Построим график функции $y = |x^2 - 6x + 4|$, зная, что графиком функции $y = (x - 3)^2 - 5$ является парабола, ветви которой направлены вверх, вершина параболы расположена в точке $(3; -5)$ (см. рис. 152).

При $a = 0$ и $a > 5$ уравнение имеет 2 корня. При $0 < a < 5$ уравнение имеет 4 корня.

При $a = 5$ уравнение имеет 3 корня.

Ответ: 2 при $a = 0$; 4 при $a \in (0; 5)$; 3 при $a = 5$; 2 при $a > 5$.

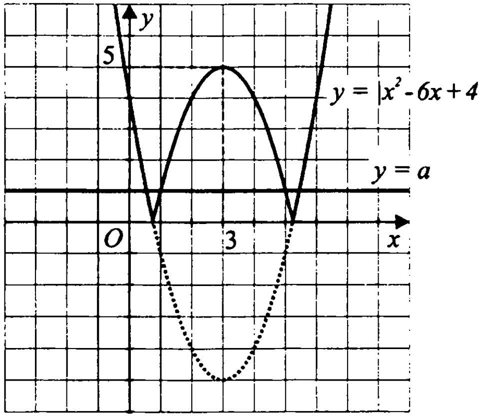


Рис. 152.

8. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 2(a-5)x + 0{,}5(a-4)(a-11) < 0$ не выполняется ни при каком x.

Решение. Учитывая, что старший коэффициент квадратного трёхчлена, стоящего в левой части, положительный и исходное неравенство строгое, то оно не выполняется ни при каком значении x, если дискриминант уравнения $x^2 - 2x(a-5)x + 0{,}5(a-4)(a-11) = 0$ неположительный, то есть $D \leqslant 0$.

Так как второй коэффициент чётный, то найдём $\frac{D}{4}$.

$\frac{D}{4} = (a-5)^2 - 0{,}5(a-4)(a-11) = a^2 - 10a + 25 - 0{,}5a^2 + 7{,}5a - 22 =$
$= 0{,}5a^2 - 2{,}5a + 3.$

Неравенство $D \leqslant 0$ равносильно неравенству $\frac{D}{4} \leqslant 0$. Следовательно, $a^2 - 5a + 6 \leqslant 0 \Leftrightarrow (a-3)(a-2) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 \leqslant a \leqslant 3$.

Ответ: $[2; 3]$.

Вариант № 1

1. При каких значениях параметра a решением неравенства $\frac{3x(x+4)}{x-a} \leqslant 0$ является множество $(-\infty; -4] \cup [0; 2)$?

Ответ: ________________.

2. При каких неположительных значениях k прямая $y = x + k + 1$ пересекает окружность $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$ в двух точках?

Ответ: ________________.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x\sqrt{x-2}+a\sqrt{x-2}=0$ имеет два различных действительных корня.

Ответ: ________________.

4. При каких значениях параметра a неравенство $x^6+3 \leqslant a$ не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

5. Парабола $y=x^2+bx+c$, симметричная относительно прямой $x=-2$, касается прямой $y=2x+3$. Найдите коэффициенты b, c.

Ответ: ________________.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $x^2+2(a-3)x-a^2+1=0$ имеет корни, один из которых меньше -1, другой — больше 2.

Ответ: ________________.

7. Найдите все целые значения a, при которых вершина параболы $y=2x^2+ax+1$ лежит выше прямой $y=x$.

Ответ: ________________.

8. При каких целых значениях n решение системы $\begin{cases} nx-y=5, \\ 2x+3ny=7 \end{cases}$ удовлетворяет условиям $x>0$, $y<0$?

Ответ: ________________.

Вариант № 2

1. При каких целых значениях параметра c уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{7-x}=c$ имеет хотя бы один корень?

Ответ: ________________.

2. При каком положительном значении a функция $y=x^2+3ax+0{,}01$ имеет наименьшее значение, равное $-2{,}24$?

Ответ: ________________.

3. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x-2}-\sqrt{x+a}=4$ имеет решение.

Ответ: ________________.

4. При каких значениях параметра p уравнение $4x^2+p=0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________.

5. Найдите все положительные значения k, при которых прямая $y = kx + 1$ пересекает в двух различных точках ломаную, заданную условиями $\begin{cases} -3x - 4, \text{ если } x < -2, \\ 2, \text{ если } -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 4, \text{ если } x > 2. \end{cases}$

Ответ: ________________.

6. Решите неравенство $\dfrac{3x + a}{2x} \geqslant 1$ при положительных значениях параметра a.

Ответ: ________________.

7. Найдите все значения a, при которых график функции $y = ax^2 - 4x + a$ расположен выше оси абсцисс.

Ответ: ________________.

8. Найдите все значения параметра a, при которых точки $A(1; 2)$, $B(3; a + 1)$, $C(a; 4)$ лежат на одной прямой.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $x\sqrt{x + 3} + a\sqrt{x + 3} = 0$ имеет два различных действительных корня?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях k прямая $y = kx - 2$ не имеет общих точек ни с параболой $y = x^2 + 3x - 1$, ни с параболой $y = x^2 - x + 2$?

Ответ: ________________.

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + 3x - 4 = a$ имеет хотя бы одно решение?

Ответ: ________________.

4. При каких значениях параметра a неравенство $x^2 + 1 \leqslant a$ не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

5. Найдите все значения параметра p, при которых прямая $y = px$ пересекает в трёх различных точках график функции

$$y = \begin{cases} 2x + 3, \text{ при } x < -3; \\ -3, \text{ при } -3 \leqslant x \leqslant 3; \\ 2x - 9, \text{ при } x > 3. \end{cases}$$

Ответ: ________________.

6. При каких значениях p графики функций $y = px^2 - 24x + 1$ и $y = 12x^2 - 2px - 1$ пересекаются в двух точках?

Ответ: ________________ .

7. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} (x-a)^2 + 2 - 3(x-a) \leqslant 0, \\ x - 3a > 0 \end{cases}$$
не имеет действительных решений?

Ответ: ________________ .

8. При каких значениях параметра a функция $y = |x+a| + |x+a+1|$ будет чётной?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. При каких значениях параметра a областью определения функции $y = \dfrac{\sqrt{x+3a}}{3x-a}$ является промежуток $[15; +\infty)$?

Ответ: ________________ .

2. При каких значениях a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$?

Ответ: ________________ .

3. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + ax + 4 = 0$ не имеет действительных корней?

Ответ: ________________ .

4. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $4x^2 - 4(a-2)x + 25 > 0$ выполняется для любого значения x.

Ответ: ________________ .

5. Найдите все значения параметра k, при которых прямая $y = kx$ пересекает в трёх различных точках график функции
$$y = \begin{cases} 3x + 1, \ x < -2, \\ -5, \ -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ 3x - 11, \ x > 2. \end{cases}$$

Ответ: ________________ .

6. Найдите все значения параметра a, при которых система неравенств $\begin{cases} x^2 \leqslant a^2, \\ 2x + a^2 < 0 \end{cases}$ имеет решение.

Ответ: ________________.

7. Найдите все значения a, при которых график функции $y = ax^2 - 4x + a$ расположен выше оси абсцисс.

Ответ: ________________.

8. Найдите все значения параметра a, при которых у уравнения $ax^2 - 4(a + 1)x - a + 6 = 0$ все корни положительны.

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. При каких значениях параметра a областью определения функции $y = \dfrac{\sqrt[4]{2x + 5a}}{x + 3a}$ является промежуток $[-4; +\infty)$?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - ax + x = 0$ принадлежат промежутку $[-2; 2]$?

Ответ: ________________.

3. При каких значениях параметра a неравенство $||x - 2| - a| \leqslant 1$ не имеет решений?

Ответ: ________________.

4. При каких значениях k прямая $y = kx + 5$ не имеет общих точек ни с параболой $y = -2x^2 - 2x + 3$, ни с параболой $y = x^2 + 5x + 21$?

Ответ: ________________.

5. При каких значениях параметра k прямая $y = kx + 1$ пересекает параболу $y = 2x^2 + 5x + 3$ ровно в одной точке?

Ответ: ________________.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $ax^2 - (2a+3)x + a + 2 = 0$ имеет два различных корня, а сумма квадратов его корней больше 3.

Ответ: ________________.

7. Найдите абсциссы всех точек параболы $y = 2x^2 + bx + c$, лежащих ниже оси Ox, если графику данной функции принадлежат точки $A(1; -6)$ и $B(2; 7)$.

Ответ: ________________.

8. Найдите все целые значения a, при которых вершина параболы $y = x^2 + ax - 2$ лежит ниже прямой $y = 2x$.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. При каких значениях параметра t уравнение $16x^2 + t = 0$ имеет ровно один действительный корень?

Ответ: ________________.

2. При каких значениях параметра k уравнение $x^2 - 3x - k = 0$ имеет ровно один корень (два равных корня)?

Ответ: ________________.

3. При каких значениях параметра p уравнение $x^2 + 5x + 2p = 0$ не имеет действительных корней?

Ответ: ________________.

4. При каких значениях параметра a неравенство $x^4 \leqslant a$ имеет хотя бы одно действительное решение?

Ответ: ________________.

5. При каких целых значениях параметра c уравнение $2\sqrt{x+3} + \sqrt{11 - 4x} = c$ имеет хотя бы один корень?

Ответ: ________________.

6. При каких значениях параметра a система
$$\begin{cases} x^2 - 2x(a^2 + 1) + a^2(a^2 + 2) < 0, \\ x < 5a \end{cases}$$
не имеет действительных решений?

Ответ: ________________.

7. Определите количество корней уравнения $|2x^2 + 4x - 7| = a$ при всех положительных значениях параметра a.

Ответ: ________________.

8. При каких целых значениях n решение системы
$$\begin{cases} 2nx + y = 4, \\ 3x - 2ny = 5 \end{cases}$$
удовлетворяет условиям $x > 0$, $y > 0$?

Ответ: ________________.

§ 23. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Основные сведения

Элементы комбинаторики

Множество (совокупность элементов) называется занумерованным, если каждому элементу этого множества сопоставлено своё натуральное число (номер) от 1 до n. Для краткости занумерованные множества также будут называться далее **наборами**.

Число перестановок. Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются **перестановками** этого множества.

Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Число размещений. Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются размещениями из n элементов по k. Размещения могут отличаться друг от друга как элементами, так и порядком.

Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k и определяется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Число сочетаний. Неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, взятых из данных n элементов, называются сочетаниями из n элементов по k. Сочетания отличаются друг от друга только элементами.

Число сочетаний из n элементов по k обозначается C_n^k и определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Теорема о числе комбинаций. Число различных комбинаций элементов, составленных из различных групп, вида $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$, где a_i — элемент i-й группы, содержащей n_i элементов, равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_r$.

Случайные события и их вероятности

Опытом, или испытанием, называют всякое осуществление комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление. Возможный результат опыта называют **событием**.

Случайным называется событие, которое в данном опыте может произойти, а может и не произойти.

Событие называют **достоверным** в данном опыте, если оно обязательно произойдёт в этом опыте. Событие называется **невозможным** в данном опыте, если оно в этом опыте произойти не может.

Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте, и **несовместными**, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Два события называются **противоположными**, если появление одного из них равносильно непоявлению другого.

События считают **равновозможными**, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Суммой, или **объединением**, двух событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Сумма двух событий A и B обозначается $A + B$. Аналогично определяется и обозначается сумма n событий:

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n.$$

Эта сумма означает событие, заключающееся в появлении хотя бы одного из них.

Произведением, или **пересечением**, двух событий называется событие, состоящее в одновременном их появлении. Произведение двух событий A и B обозначается через AB. Произведение n событий

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n.$$

означает событие, состоящее в появлении всех событий $A_1 A_2 \ldots A_n$.

Разностью событий A и B называется событие C, которое означает, что наступает событие A и не происходит событие B. Разность событий принято обозначать $A - B$.

Если при каждом осуществлении комплекса условий, при котором происходит событие A, происходит и событие B, то говорят, что A влечёт за собой B, или A является частным случаем B, и обозначается: $A \subset B$. Если $\mathrm{A} \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A и B равносильны: $A \equiv B$.

Вероятность события

Классическое определение вероятности. **Вероятность события** A определяется формулой

$P(A) = m/n,$

где n — число всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, m — число элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Статистическое определение вероятности. Относительная частота события A (или просто частота) определяется формулой

$W(A) = m/n,$

где m — число опытов, в которых появилось событие A, n — число всех проведенных опытов.

Вероятность $P(C)$ наступления хотя бы одного из двух несовместных событий A и B равна сумме их вероятностей:

$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B).$

Вероятность $P(\bar{A})$ противоположного события $\bar{A}$ событию A:

$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

Элементы статистики.

Математическая статистика — наука, разрабатывающая математические методы систематизации и использования статистических данных для научных и практических выводов.

Мода — значение признака, имеющее наибольшую частоту в статистическом ряду распределения.

Среднее арифметическое (или просто среднее) набора чисел — это сумма всех чисел в этом наборе, делённая на их количество.

Медиана — это такое значение признака, которое разделяет ранжированный (упорядоченный) ряд распределения на две равные части. Для нахождения медианы нужно отыскать значение признака, которое находится на середине упорядоченного ряда.

Демонстрационный вариант

1. У одного мальчика 4 книги по математике, а у другого — 3. Сколькими способами они могут обменять 2 книги одного на 2 книги другого?

1) 18 2) 12 3) 9 4) 4

Решение. Чтобы мальчики смогли обменять две книги одного на две книги другого, каждому из них нужно выбрать из своих книг по две для обмена. Определим, сколькими способами это может сделать каждый из них. Для этого воспользуемся формулой определения числа сочетаний из n элементов по k: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Количество выборок из 4-х книг по две равно $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!(4-2)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2} = 6$. Количество выборок из 3-х книг по две равно $C_3^2 = \dfrac{3!}{2!(3-2)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1} = 3$. Теперь нужно определить, сколько пар можно составить из множества, состоящего из 6 элементов, с множеством из 3 элементов. Число таких пар равно $3\cdot6 = 18$.

Следовательно, мальчики могут обменяться 18 способами. Из предложенных ответов верным является 1).

Ответ: 1.

2. К кассе кинотеатра одновременно подошли 5 человек. Сколькими способами они могут выстроиться в очередь?

1) 10 2) 100 3) 120 4) 50

Решение. Согласно условию задачи, у нас есть множество, состоящее из 5 элементов. Нам нужно посчитать количество расположений (без повторений) этих элементов на 5 местах, то есть определить число перестановок 5 элементов. Это число равно $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

3. Возвращаясь с прогулки, Петя обнаружил, что он забыл код замка от двери подъезда. Он помнит, что замок открывается одновременным нажатием трёх кнопок из десяти, которые расположены в два ряда по пять штук в каждом, причём две кнопки должны быть нажаты в верхнем ряду, а одна — в нижнем. Какое максимальное число комбинаций должен перебрать Петя, чтобы открыть дверь?

1) 120 2) 240 3) 100 4) 50

Решение. Согласно условию задачи, две кнопки должны быть одновременно нажаты в ряду, состоящем из пяти кнопок. Количество выборок из 5 элементов по два равно $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!(5-2)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3} = 10$.

Следовательно, количество комбинаций нажатия двух кнопок в первом ряду равно 10. Количество способов, которыми можно нажать одну кнопку в нижнем ряду $C_5^1 = \dfrac{5!}{1!(5-1)!} = \dfrac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4} = 5$.

Значит, максимальное количество комбинаций, которые должен перебрать Петя, чтобы открыть замок, равно $10\cdot5 = 50$.

Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

4. Вероятность рождения мальчика равна 0,5. В семье есть два мальчика и ждут ещё одного ребёнка. Найдите вероятность того, что родится девочка.

1) 0,125 2) $\frac{1}{3}$ 3) 0,375 4) 0,5

Решение. События рождения девочки или мальчика являются независимыми. (В том числе эти события не зависят от того, мальчики или девочки рождались в семье прежде или вообще семья не имела детей на момент рождения ребёнка.)

Поэтому вероятность рождения девочки равна $1-0{,}5 = 0{,}5$. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

5. Бросают три игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет не более четырёх очков.

1) $\frac{1}{108}$ 2) $\frac{1}{54}$ 3) $\frac{1}{216}$ 4) $\frac{1}{9}$

Решение. Все равновозможные исходы при бросании трёх кубиков образуют множество троек, в которых первая цифра — количество очков, выпавших на первом кубике, вторая — на втором, третья — на третьем. Количество всевозможных троек равно $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

Событию выпадения на трёх кубиках не более четырёх очков соответствуют четыре тройки $(1;1;1)$, $(1;\ 1;\ 2)$, $(1;\ 2;\ 1)$ и $(2;\ 1;\ 1)$. Следовательно, вероятность того, что в сумме на трёх игральных кубиках выпадет не более четырёх очков, равна $\frac{4}{216} = \frac{1}{54}$. Из предложенных ответов верным является 2).

Ответ: 2.

6. В мешочке лежат неразличимые на ощупь карточки с буквами Ш, А, Л, А, Ш. Какова вероятность того, что, наудачу извлекая карточки и выкладывая их на столе, получится слово ШАЛАШ?

1) $\frac{1}{10}$ 2) $\frac{1}{20}$ 3) $\frac{1}{30}$ 4) $\frac{1}{120}$

Решение. Занумеруем карточки числами от 1 до 5: $Ш_1А_2Л_3А_4Ш_5$. Общее число исходов равно количеству перестановок пяти карточек, то есть 5!. Благоприятными исходами будут следующие: $Ш_1А_2Л_3А_4Ш_5$, $Ш_5А_2Л_3А_4Ш_1$, $Ш_1А_4Л_3А_2Ш_5$, $Ш_5А_4Л_3А_2Ш_1$. Так как все исходы равновозможны, то искомая вероятность равна $\frac{4}{5!} = \frac{4}{120} = \frac{1}{30}$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

7. Измеряя вес семи пришедших на урок учеников, учитель физкультуры получил ряд чисел: 51, 53, 59, 52, 55, 54, 51. Найдите разность между модой и медианой этого ряда.

1) 1 2) −1 3) −2 4) 0

Решение. Модой ряда является число, наиболее часто в нём встречающееся. В данном ряде мода равна 51.

Для того чтобы найти медиану, упорядочим заданный ряд по возрастанию: 51, 51, 52, 53, 54, 55, 59. Поскольку в этой последовательности нечётное число элементов, то медианой ряда будет число, стоящее посередине, то есть 53. Следовательно, разность между модой и медианой равна $51 - 53 = -2$. Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

8. Вася в четверти получил по 12 предметам среднюю оценку 3,5. По какому количеству предметов он должен улучшить оценку на 1 балл, чтобы его средняя оценка стала равной 4?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 6

Решение. Согласно условию задачи, мы имеем ряд чисел x_1, x_2, ..., x_n (оценки по каждому из предметов).

Следовательно, сумма набранных баллов по всем предметам
$S = x_1 + x_2 + ... + x_{11} + x_{12} = \bar{x} \cdot n = 3{,}5 \cdot 12 = 42$.

Пусть $y_1, y_2, ..., y_n$ — ряд чисел, соответствующий оценкам Васи после их исправления. Количество элементов этого ряда осталось прежним, $n = 12$ (количество предметов), и, согласно условию, среднее арифметическое нового ряда $\bar{y} = 4$ (средний балл, который Вася желает получить).

Тогда сумма баллов после пересдачи
$S_1 = y_1 + y_2 + ...y_{11} + y_{12} = \bar{y} \cdot n = 4 \cdot 12 = 48$.

Следовательно, Вася должен улучшить свой результат на
$S_1 - S = 48 - 42 = 6$ баллов. Значит, он должен улучшить на 1 балл оценки по 6 предметам. Из предложенных ответов верным является 4).

Ответ: 4.

Вариант № 1

1. Для участия в фотовыставке было отобрано 32 фотографии. На стендах можно разместить только 30 фотографий. Сколько различных вариантов из 30 фотографий можно разместить на стендах?

Ответ: ________________.

2. Сколько всего можно составить четырёхзначных чисел, начинающихся с цифры 3 и состоящих из цифр 1, 2, 3, 4, в записи которых все цифры числа, кроме цифры 3, встречаются по одному разу, а цифра 3 не более двух раз?

1) 6 2) 90 3) 14 4) 24

3. Имеются 3 разноцветных мяча, 5 разноцветных кубиков и 4 разноцветные скакалки. Сколькими способами можно получить набор из двух мячей, двух кубиков и двух скакалок?

1) 180 2) 60 3) 23 4) 12

4. В таблице представлены данные посещаемости кружка за неделю девочками и мальчиками. Определите количество дней, в которые девочек присутствовало больше, чем мальчиков.

Дни недели	пн	вт	ср	чт	пт	сб	вс
Количество девочек	20	32	16	15	20	18	20
Количество мальчиков	13	17	24	16	17	15	20

1) 6 2) 5 3) 3 4) 4

5. Бросают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадут ровно два герба.

1) $\frac{2}{3}$ 2) $\frac{3}{4}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{3}{8}$

6. В первой корзине лежат 2 яблока и 3 груши, а во второй — 3 яблока и 1 груша. Из каждой корзины вынимают наугад по одному фрукту. Какова вероятность того, что это будут два яблока?

Ответ: ________________.

7. Учительница попросила пятерых опоздавших учеников выписать на доске время в минутах, которое они в среднем тратят на дорогу из дома до школы. Получились следующие данные: 20, 25, 35, 30, 40.

Насколько среднее значение этого ряда превосходит его размах?

1) 10 2) 20 3) 5 4) 0

8. В классах 9 «А» и 9 «Б» провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	75
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

Найдите разность между модами измерений для классов «А» и «Б».

1) 1 2) 0 3) 5 4) 10

Вариант № 2

1. В классе 10 девочек. Для участия в танцевальном конкурсе из них нужно выбрать группу из 7 девочек. Сколько различных групп можно составить?

1) 10 2) 17 3) 70 4) 120

2. Сколько различных чисел можно составить, переставляя цифры числа 121232?

1) 100 2) 720 3) 60 4) 120

3. Сколько встречается чётных четырёхзначных чисел, в записи которых цифры 3, 4, 5 и 6 используются по одному разу?

1) 6 2) 12 3) 24 4) 360

4. Имеются 6 различных книг, 5 различных журналов и 4 различных блокнота. Сколькими способами можно получить набор из трёх книг, одного журнала и двух блокнотов?

1) 1500 2) 120 3) 34 4) 600

5. Бросают три монеты. Найдите вероятность того, что выпадет ровно одна «решка».

1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{3}{8}$ 3) $\frac{1}{2}$ 4) $\frac{1}{4}$

6. В корзине лежат 3 красных, 4 зелёных и 5 синих шаров. Найдите вероятность того, что наугад извлечённый шар окажется зелёным или синим.

Ответ: ________________.

7. Дан ряд чисел: 16, 15, 18, 12, 13, 20, 16, 14, 11. Найдите, насколько мода этого ряда больше среднего.

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

8. Ученики 9-го класса получили следующие четвертные оценки по математике:

4	5	5	3	4	4	4	3	5	4	5	5	5	3	3	4	4	4	4	3

Определите процентную частоту оценки «5».

1) 20% 2) 30% 3) 45% 4) 60%

Вариант № 3

1. Номер автобусного билета состоит из шести цифр. Найдите число автобусных билетов, все цифры в номерах которых нечётные.

Ответ: ________________ .

2. На детской карусели есть 10 одинаковых посадочных мест, расположенных по кругу. Покататься на карусели пришли 9 детей. Сколькими способами их может рассадить карусельщик? Два способа считать одинаковыми, если один из другого получается поворотом карусели.

Ответ: ________________ .

3. В классе 30 учеников. Найдите число способов выбрать из этих учеников трёх дежурных.

Ответ: ________________ .

4. На случайным образом выбранное поле шахматной доски 8×8 поставили короля. Найдите вероятность того, что король оказался в угловой клетке.

Ответ: ________________ .

5. Одновременно бросили два игральных кубика. Найдите вероятность того, что сумма выпавших чисел равна 4.

Ответ: ________________ .

6. В кошельке находится пять монет достоинством 1 рубль, три монеты достоинством 2 рубля и семь монет достоинством 5 рублей. Случайным образом из кошелька вытаскивают одну монету, а затем подбрасывают. Какова вероятность того, что выпадет решка двухрублёвой монеты?

Ответ: ________________ .

7. По статистике из 1000 процессоров, изготовленных на заводе, 200 бракованных. Сколько бракованных процессоров следует ожидать, если планируется выпустить 550 400 процессоров?

Ответ: ________________ .

8. Какова частота простых чисел среди первых 30 натуральных чисел?

Ответ: ________________ .

Вариант № 4

1. Автомобильные номера состоят из трёх цифр. Найдите количество автомобильных номеров данной серии (буквы), все цифры в которых чётные. (При решении учесть, что номера «000» не существует.)

Ответ: ________________.

2. На карусели есть 8 посадочных мест, расположенных по кругу. Покататься пришли 6 детей. Сколькими способами их может рассадить карусельщик? Два способа считать одинаковыми, если один из них получается из другого поворотом карусели.

Ответ: ________________.

3. В классе 25 учеников. Найдите количество способов выбрать из них 2-х дежурных.

Ответ: ________________.

4. Найдите вероятность того, что в написании наудачу взятого двузначного числа встречается цифра 5.

Ответ: ________________.

5. Одновременно бросили две игральные кости. Какова вероятность того, что сумма очков не будет превышать трёх?

Ответ: ________________.

6. В мешке находится 3 чёрных кубика и 5 белых. Случайным образом из мешка достают два кубика. Какова вероятность того, что оба кубика белые?

Ответ: ________________.

7. По мосту производится бомбометание из двух самолётов. Вероятность попадания из первого самолёта 0,8, из второго — 0,6. Мост будет разрушен, если в него попадёт хотя бы одна бомба. Какова вероятность того, что в результате одного бомбометания из двух самолётов мост будет разрушен?

Ответ: ________________.

8. По статистике автозавода, из 1000 машин 20 бракованных. Сколько бракованных машин следует ожидать, если завод собирается выпустить 300 500 машин?

Ответ: ________________.

Вариант № 5

1. Сколько существует вариантов раскраски всех клеток доски 1×9 в белый и чёрный цвета, если в каждой раскраске должно быть в точности 8 клеток одного цвета? (Если одна раскраска доски с первой по девя-

тую клетку совпадает с другой раскраской с девятой по первую клетку, то такие варианты раскрасок считать различными.)

Ответ: ________________.

2. Сколькими способами можно рассадить 12 рыцарей за круглым столом? (Два способа считать одинаковыми, если один из другого получается поворотом стола.)

Ответ: ________________.

3. В парке 10 различных аттракционов. Сколько существует способов выбрать 4 различных аттракциона?

Ответ: ________________.

4. На произвольное поле шахматной доски поставили белого короля, затем на другое поле поставили чёрную ладью. Какова вероятность того, что ладья бьёт короля? (Ладья бьёт клетки своей вертикали и горизонтали.)

Ответ: ________________.

5. Из колоды из 36 карт вытаскивают две карты. Какова вероятность того, что среди них хотя бы один туз?

Ответ: ________________.

6. Из ста карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 100, вытаскивают одну, затем ещё одну. Какова вероятность того, что число, написанное на второй карточке, на 2 больше числа, написанного на первой?

Ответ: ________________.

7. На каждые 11 страниц некий наборщик в среднем допускает 3 ошибки. Сколько ошибок следует ожидать на 1650 страницах?

Ответ: ________________.

8. Какова частота закрашенных клеток среди всех клеток доски, изображённой на рисунке 153?

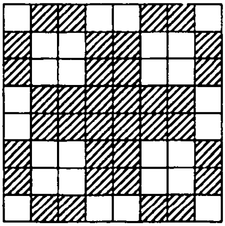


Рис. 153.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. В классе 13 мальчиков. Для участия в футбольном турнире необходимо собрать команду из 11 мальчиков. Сколько различных команд можно составить из ребят этого класса?

1) 2 2) 13 3) 78 4) 143

2. Сколько встречается трёхзначных чисел, в записи которых цифры 2, 3 и 4 встречаются по одному разу?

1) 24 2) 9 3) 6 4) 3

3. У Тани есть 3 разноцветные ручки, 6 разноцветных фломастеров и 4 разноцветных карандаша. Сколькими способами можно получить набор из одной ручки, одного фломастера и одного карандаша?

1) 27 2) 18 3) 13 4) 72

4. У мамы 3 яблока и 4 груши. В течение недели она выдаёт сыну по одному фрукту. Сколькими способами она может это сделать?

1) 5040 2) 35 3) 70 4) 210

5. Бросают два игральных кубика. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 8 очков.

1) $\frac{5}{36}$ 2) $\frac{1}{6}$ 3) $\frac{1}{9}$ 4) $\frac{1}{7}$

6. В партии из 5 деталей находится 2 бракованных. Из партии наугад выбирают 2 детали. Какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными?

1) 0,1 2) 0,2 3) 0,3 4) 0,4

7. На письменном экзамене по математике можно получить от 0 до 10 баллов. Десять учеников получили такие оценки: 10, 4, 5, 7, 7, 6, 9, 4, 8, 5. Определите, на сколько размах этого ряда данных меньше его среднего.

1) 1 2) 2 3) 6,5 4) 0,5

8. В классах 9 «А» и 9 «Б» провели медицинское обследование. При этом измерили вес учеников (с точностью до 5 кг). Результаты (в кг) представлены в таблице:

9 «А»	60	55	65	45	70	65	60	70	50	65	60
9 «Б»	50	55	70	60	65	60	70	60	55	60	75

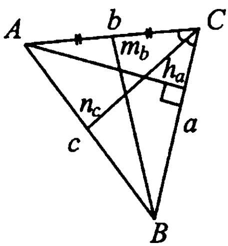
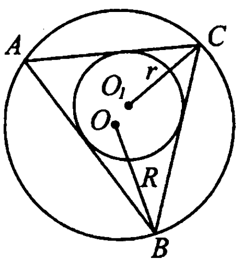
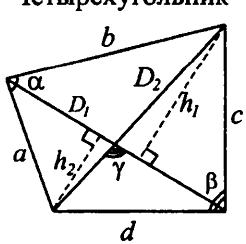
Найдите разность между объёмами измерений для классов «А» и «Б».

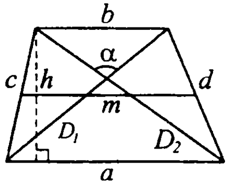
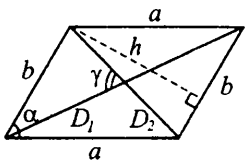
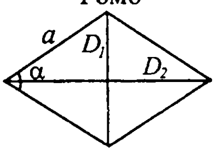
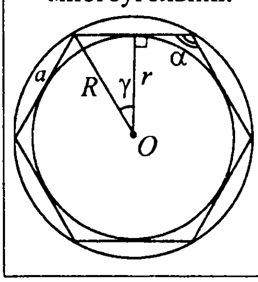
1) 1 2) 0 3) 5 4) 10

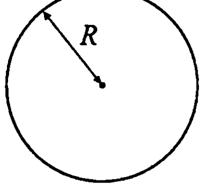
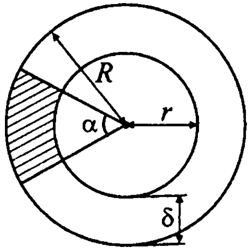
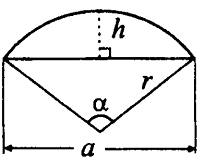
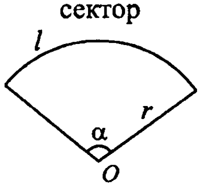
§ 24. Геометрия

Основные формулы

Далее S — площадь фигуры, P — периметр, p — полупериметр.

Чертежи	Обозначения	Формулы
Треугольник  	a, b, c — стороны; A, B, C — противолежащие им углы; h_a, h_b, h_c — высоты, проведённые к соответствующим сторонам; n_a, n_b, n_c — биссектрисы, проведённые к соответствующим сторонам; b_a и b_c — отрезки, на которые делится биссектрисой сторона b; m_a, m_b, m_c — медианы, проведённые к соответствующим сторонам; $\mu = \dfrac{(m_a+m_b+m_c)}{2}$ — полусумма медиан; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности.	$h_b = \dfrac{2S}{b}$ $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ $n_b = \dfrac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$ $n_b = \sqrt{ac - b_a b_c}$ $S = \dfrac{1}{2}ah_a = \dfrac{1}{2}ab\sin C$ $S = \dfrac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}$ $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ $S = r^2 \operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$ $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ $S = \dfrac{4}{3}\cdot\sqrt{\mu(\mu-m_a)}\times$ $\times\sqrt{(\mu-m_b)(\mu-m_c)}$
Четырёхугольник 	a, b, c, d — стороны; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями; h_1, h_2 — длины перпендикуляров, опущенных на диагональ D_1; α, β — два противолежащих угла четырёхугольника.	$S = \dfrac{h_1+h_2}{2}D_1$ $S = \dfrac{1}{2}D_1 D_2 \sin\gamma$ $S = \dfrac{1}{2}(ab\sin\alpha + cd\sin\beta)$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Трапеция  	a, b — основания; c, d — боковые стороны; D_1, D_2 — диагонали; α — угол между диагоналями; m — средняя линия; h — высота.	$m = \frac{1}{2}(a+b)$ $P = 2m + c + d$ $S = \frac{1}{2}(a+b)h = mh$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\alpha$
Параллелограмм  	a, b — стороны; h — расстояние между сторонами b; α — угол параллелограмма; D_1, D_2 — диагонали; γ — угол между диагоналями.	$S = bh$ $S = ab\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2\sin\gamma$
Ромб  	a — сторона; α — угол ромба; D_1, D_2 — диагонали.	$S = a^2\sin\alpha$ $S = \frac{1}{2}D_1D_2$
Правильный многоугольник  	n — число сторон; a — сторона; R — радиус описанной окружности; r — радиус вписанной окружности; $\alpha = 180° - 2\gamma$ — угол многоугольника $\left(\gamma = \frac{180°}{n}\right)$.	$a = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ $P = na$ $P = 2nR\sin\gamma = 2nr\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{4}na^2\,\mathrm{ctg}\,\gamma$ $S = nr^2\,\mathrm{tg}\,\gamma$ $S = \frac{1}{2}nR^2\sin 2\gamma$ $S = \frac{1}{2}nar$

Чертежи	Обозначения	Формулы
Круг 	R — радиус; l — длина окружности.	$S = \pi R^2$ $l = 2\pi R$
Круговое кольцо 	r — внутренний радиус; R — наружный радиус; d — внутренний диаметр; D — наружный диаметр; $\varrho = \dfrac{r+R}{2}$ — средний радиус; $\delta = R - r$ — ширина кольца; α — центральный угол части кольца (в градусах).	$S = \pi(R^2 - r^2)$ $S = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)$ $S = 2\pi\rho\delta$ Площадь части кольца $S = \dfrac{\pi\alpha}{360}(R^2 - r^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{90}(D^2 - d^2)$ $S = \dfrac{\pi\alpha}{180}\rho\delta$
Круговой сегмент 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги; a — длина хорды; h — высота.	$P = l + a$ $S = \dfrac{1}{2}r^2\left(\dfrac{\pi\alpha}{180} - \sin\alpha\right)$ $S = \dfrac{r(l-a)+ah}{2}$
Круговой сектор 	r — радиус; α — центральный угол (в градусах); $l = \dfrac{\pi\alpha}{180}r$ — длина дуги.	$P = l + 2r$ $S = \dfrac{lr}{2}$ $S = \dfrac{\pi r^2\alpha}{360}$

Демонстрационный вариант

1. Сколько потребуется плиток размером 15 см × 25 см, чтобы покрыть пол в магазине размером 9 м × 10 м? (Схема укладки пола изображена на рисунке 154.)

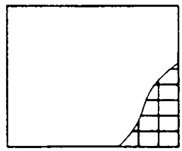


Рис. 154.

Решение. 15 см= 0,15 м; 25 см= 0,25 м. Следовательно, укладывая плитку согласно схеме, по длине пола потребуется $\frac{10}{0{,}25} = 40$ плиток, а по ширине — $\frac{9}{0{,}15} = 60$ плиток.

Значит, всего потребуется $40 \cdot 60 = 2400$ штук.

Ответ: 2400.

2. Угол C трапеции $ABCD$ (см. рис. 155) в 3 раза больше угла D. Найдите градусную меру угла D.

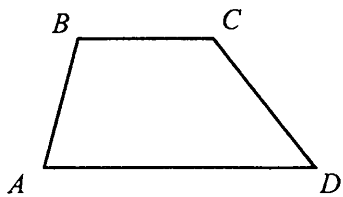


Рис. 155.

Решение. Пусть $\angle D = x°$, тогда $\angle C = (3x)°$. $\angle C + \angle D = 180°$ как сумма углов трапеции, прилежащих к боковой стороне. Следовательно, $3x + x = 180$; $x = 45$. То есть $\angle D = 45°$.

Ответ: 45.

3. Укажите номера верных утверждений.

1) Если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Сумма острых углов любого треугольника равна 180°.

3) Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

4) Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен его гипотенузе.

Решение. Рассмотрим каждое из утверждений.

1) Первое утверждение неверно, так как если три угла одного треугольника равны трём углам другого треугольника, то треугольники подобны, но при этом не обязательно равны.

2) Второе утверждение неверно. Например, в случае, если один из углов треугольника равен 90°, то сумма его острых углов равна 90°; если один из углов треугольника тупой, то сумма его острых углов меньше 90°.

3) Утверждение верно.

4) Последнее утверждение неверно, так как радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине его гипотенузы.

Из предложенных ответов верным является 3).

Ответ: 3.

4. AB и CD — диаметры окружности. Докажите равенство треугольников ABD и ACD (см. рис. 156).

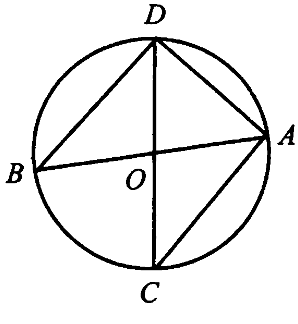


Рис. 156.

Решение. Рассмотрим $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.

$AB = CD$ как диаметры одной окружности; $\angle BDA = \angle CAD = 90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметры; $\angle ABD = \angle DCA$ как вписанные углы, опирающиеся на дугу AD.

Следовательно, $\triangle ABD = \triangle ACD$ по гипотенузе и острому углу.

5. Две стороны треугольника равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а медиана к третьей стороне равна 2 см. Найдите $(5-\sqrt{15})P$, где P — периметр треугольника.

Решение. Из формулы длины медианы $m_b = \dfrac{1}{2}\sqrt{2a^2+2c^2-b^2}$ найдём сторону b.

$2 = \frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{15})^2 + 2 \cdot 1^2 - b^2}$, $16 = 30 + 2 - b^2$, $b^2 = 16$, $|b| = 4$. Так как $b > 0$, то $b = 4$.

Тогда периметр треугольника $P = 1 + \sqrt{15} + 4 = 5 + \sqrt{15}$. Следовательно, $(5 - \sqrt{15})p = (5 - \sqrt{15})(5 + \sqrt{15}) = 25 - 15 = 10$.

Ответ: 10.

6. В параллелограмме $ABCD$ длина отрезка AB равна 4. Биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K, а продолжение стороны CD в точке E. Найдите длину отрезка KC, если $EC = 1$.

Решение. 1) $\angle 1 = \angle 2$, так как AK — биссектриса угла A (см. рис. 157). $\angle 2 = \angle 3$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей AK. Отсюда $\angle 1 = \angle 3$. Значит, $\triangle ABK$ — равнобедренный, $BK = AB = 4$.

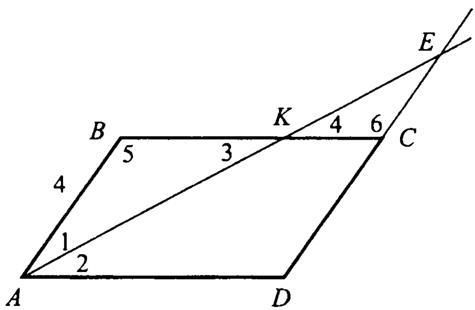


Рис. 157.

2) $\triangle ABK \sim \triangle ECK$ по первому признаку подобия ($\angle 3 = \angle 4$ как вертикальные, $\angle 5 = \angle 6$ как накрест лежащие при параллельных сторонах AB и CD и секущей BC).

Значит, $KC = EC = 1$.

Ответ: 1.

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) точки M и N — середины боковых сторон. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN, если периметр треугольника ABC равен 32, а длина отрезка MN равна 6.

Решение. 1) Точки M и N — середины сторон AB и BC, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$, $MN = \frac{1}{2}AC$, $AC = 6 \cdot 2 = 12$ (см. рис. 158).

$$AB = BC = \frac{P_{ABC} - AC}{2} = \frac{32 - 12}{2} = 10,$$

$$MB = NB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

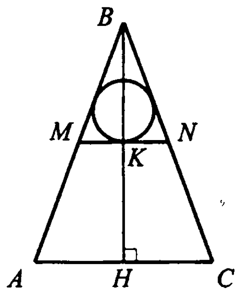


Рис. 158.

2) $P_{MBN} = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16.$

3) BH — высота треугольника ABC.
По теореме Пифагора $BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

4) $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BH = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48,$

$S_{MBN} = \frac{1}{4}S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 48 = 12.$

$S_{MBN} = \frac{1}{2}rP_{MBN}$, где r — радиус окружности, вписанной в $\triangle MBN$,

$r = \frac{2S_{MBN}}{P_{MBN}} = \frac{2 \cdot 12}{16} = 1{,}5.$

Ответ: 1,5.

8. Из одной точки окружности проведены две хорды длиной 9 и 17. Найдите диаметр этой окружности, если расстояние между серединами хорд равно 5.

Решение. Точки M и N — середины хорд AB и AC соответственно, значит, MN — средняя линия $\triangle ABC$ (см. рис. 159).

$$MN = \frac{1}{2}BC, \ BC = 2MN = 2 \cdot 5 = 10.$$

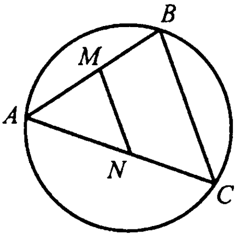


Рис. 159.

Периметр $P_{ABC} = 17 + 9 + 10 = 36$,

полупериметр $p = \frac{1}{2}P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 36 = 18$.

Следовательно, $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{18(18-10)(18-17)(18-9)} = 36$.

Так как $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$, то $R = \frac{abc}{4S} = \frac{9 \cdot 17 \cdot 10}{4 \cdot 36} = 10{,}625$. Диаметр равен $2 \cdot 10{,}625 = 21{,}25$.

Ответ: 21,25.

Вариант № 1

1. На сколько градусов повернётся часовая стрелка за 45 минут?

Ответ: ________________.

2. В треугольнике ABC угол A в 2 раза больше угла B и в 3 раза меньше угла C. Найдите его градусную меру.

Ответ: ________________.

3. Укажите номера неверных утверждений.

1) Если две стороны одного треугольника и угол между ними равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

2) Угол, вписанный в окружность радиуса 1, имеет градусную меру, равную половине дуги, на которую он опирается.

3) Угол, вписанный в окружность радиуса 1, имеет радианную меру, равную половине длины дуги, на которую он опирается.

4) Сумма длин двух сторон треугольника может быть равна длине третьей стороны.

4. Отрезки AB и CD лежат на параллельных прямых, AD и BC пересекаются в точке O, при этом $BO = OC$. Докажите равенство треугольников AOB и COD.

5. В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите BL, если AL — высота треугольника и $AB = 1$ см, $AC = \sqrt{15}$ см, $AD = 2$ см.

Ответ: ________________ .

6. В равнобочной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 4 см. Найдите высоту трапеции.

Ответ: ________________ .

7. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) длина средней линии MN равна 6 ($M \in AB$, $N \in BC$), а $\sin\angle BAC = \frac{4}{5}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MBN.

Ответ: ________________ .

8. Центры двух окружностей находятся на расстоянии $\sqrt{80}$. Радиусы окружностей равны 4 и 8. Найдите длину общей касательной.

Ответ: ________________ .

Вариант № 2

1. Воду из первого аквариума в форме куба с ребром 60 см, наполненного на $\frac{1}{6}$, перелили во второй аквариум в форме куба с ребром 40 см. Сколько дециметров составил уровень воды во втором аквариуме?

Ответ: ________________ .

2. В прямоугольной трапеции больший угол при меньшем основании равен 160°. Найдите градусную меру меньшего угла при большем основании.

Ответ: ________________ .

3. Выберите из правой колонки корректное продолжение для каждого утверждения из левой колонки.

1) Длина катета, лежащего против угла в 30°, составляет ...

2) Радиус окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника, составляет ...

3) Квадратный корень из суммы квадратов длин катетов составляет ...

А) $\frac{1}{2}$ длины гипотенузы;

Б) $\frac{1}{3}$ длины гипотенузы;

В) длину гипотенузы.

Ответ:

1	2	3

4. Докажите, что медианы, проведённые к боковым сторонам равнобедренного треугольника, равны.

5. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) проведена медиана CD, длина которой 2,5 см. Найдите периметр треугольника, если один из катетов на 1 см меньше гипотенузы.

Ответ: ________________.

6. В параллелограмме сторона и бóльшая диагональ равны соответственно 3 и $\sqrt{37}$. Найдите периметр параллелограмма, если его острый угол равен 60°.

Ответ: ________________.

7. Длина одного из катетов прямоугольного треугольника равна 12. Расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до этого катета равно 2,5. Найдите радиус вписанной в этот треугольник окружности.

Ответ: ________________.

8. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AC пересекает окружность в точках C и D. Найдите AD, если $AC = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 3

1. Шкала вольтметра имеет форму полуокружности, на которую равномерно нанесены деления от 0 до 9 Вольт. На сколько градусов повернётся стрелка прибора при изменении напряжения от 1 до 5 Вольт?

Ответ: ________________.

2. Найдите градусную меру угла A треугольника ABC, если $BC = 15$, $AB = 12$, $AC = 9$.

Ответ: ________________.

3. Укажите номер верного продолжения следующего утверждения: «Градусные меры центрального и вписанного углов, опирающихся на одну дугу ...»

1) равны
2) относятся соответственно как 2 : 1
3) относятся соответственно как 1 : 2
4) никак не связаны

4. В четырёхугольнике диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что данный четырёхугольник — ромб.

5. В треугольнике MNP проведена медиана MD. Найдите её длину, если $MN = 1$, $MP = \sqrt{15}$ и $\cos \angle MNP = \frac{1}{4}$.

Ответ: ________________.

6. Сторона ромба равна 5 см, а длины диагоналей относятся как 4 : 3. Найдите сумму длин диагоналей ромба.

Ответ: ________________.

7. Тангенс острого угла BAC прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен $\frac{5}{12}$, а расстояние от центра описанной около этого треугольника окружности до катета AC равно 2,5. Найдите периметр этого треугольника.

Ответ: ________________.

8. К окружности проведена касательная AB (B — точка касания). Прямая AM проходит через центр окружности и пересекает её в точках M и N. Найдите квадрат расстояния от точки B до прямой AN, если $AM = 1$, $AB = \sqrt{3}$.

Ответ: ________________.

Вариант № 4

1. Парковую зону прямоугольной формы площадью 1 га в целях безопасности решили огородить забором. Сколько секций забора потребуется, если длина парка 200 м, а длина одной секции забора — 2,5 метра?

Ответ: ________________.

2. Чему равен угол при основании равнобедренного треугольника, если угол при его вершине равен 80°? Ответ укажите в градусах.

Ответ: ________________.

3. Укажите номер верного утверждения.

1) Квадрат гипотенузы равен сумме катетов.
2) Медианы треугольника делятся точкой пересечения в отношении 3 : 1.
3) При пересечении двух параллельных прямых третьей накрест лежащие углы равны.
4) В ромбе все углы равны.

4. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина BC (см. рис. 160). Докажите, что треугольник AMD равнобедренный.

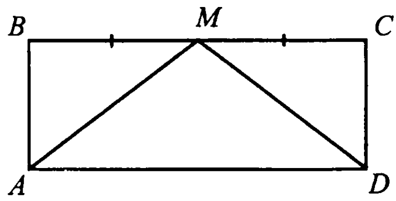


Рис. 160.

5. Длины двух сторон треугольника равны 27 и 29. Длина медианы, проведённой к третьей стороне, равна 26. Найдите высоту треугольника, проведённую к стороне длиной 27.

Ответ: ________________ .

6. Длины двух сторон остроугольного треугольника равны $\sqrt{10}$ и $\sqrt{13}$. Найдите длину третьей стороны, если она равна длине проведённой к ней высоты.

Ответ: ________________ .

7. Около круга радиуса 2 описана равнобедренная трапеция с острым углом 30°. Найдите длину средней линии трапеции.

Ответ: ________________ .

8. В окружности радиуса 17,5 проведены диаметр AB, хорды AC и BC, перпендикуляр CD к диаметру AB. Найдите сумму длин хорд AC и BC, если $AC : AD = 5 : 3$.

Ответ: ________________ .

Вариант № 5

1. Сосуд имеет форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием. Высота сосуда составляет 1,5 м, а объём — 6 м^3. Найдите длину стороны основания сосуда (в метрах).

Ответ: ________________ .

2. В ромбе $ABCD$ угол A на 30° больше угла B. Найдите градусную меру угла C.

Ответ: ________________ .

3. Укажите номера утверждений, которые могут стать справедливыми для конкретных построений.

1) В треугольнике ABC $AB = 8$, $AC = BC = 4$.

2) В равнобедренной трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами AB и DC $\angle A = \angle B$.

3) Угол при вершине равнобедренного треугольника в 2 раза больше угла при основании.

4) Гипотенуза прямоугольного треугольника в 2 раза больше каждого из его катетов.

4. В треугольнике ABC $AB = 5$, $AC = 2$, $BC = 4$. Точка K лежит на стороне BC и $BK = 1$, точка M лежит на стороне AB и $BM = 1{,}25$ (см. рис. 161). Докажите, что $MK||AC$.

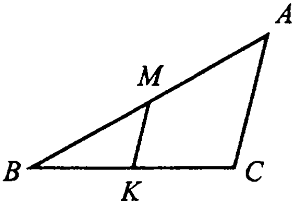


Рис. 161.

5. В равнобедренном треугольнике проведена медиана к боковой стороне, равной 4. Найдите квадрат длины основания треугольника, если длина медианы равна 3.

6. Периметр параллелограмма 90, а острый угол — 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1 : 3. Найдите бóльшую сторону параллелограмма.

Ответ: ________________.

7. Около круга описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 10. Определите периметр трапеции.

Ответ: ________________.

8. Из точки, данной на окружности, проведены две взаимно перпендикулярные хорды. Отрезок, соединяющий их середины, равен 6. Найдите радиус окружности.

Ответ: ________________.

Вариант № 6

1. Шкала спидометра имеет форму полуокружности, на которой равномерно нанесены деления 0 до 240 км/ч. На сколько градусов повернётся стрелка спидометра при изменении скорости на 60 км/ч?

Ответ: ________________.

2. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 10°. Найдите градусную меру угла при вершине.

Ответ: ________________.

3. Укажите номера утверждений, которые не являются верными ни для какого построения.

1) Длина гипотенузы равна длине катета.
2) Сумма длин катетов равна квадрату гипотенузы.
3) Биссектриса острого угла трапеции перпендикулярна к боковому ребру.
4) Окружность вписана в прямоугольник, не являющийся квадратом.

4. Треугольник MNK образован средними линиями треугольника ABC (см. рис. 162). Докажите, что все его углы равны соответствующим углам треугольника ABC.

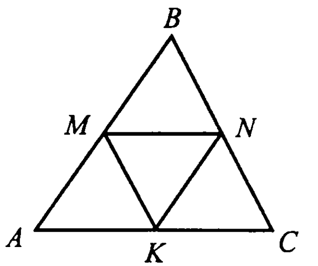


Рис. 162.

5. Основание равнобедренного треугольника равно 30, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 24. Найдите длину боковой стороны.

Ответ: ________________ .

6. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса тупого угла B пересекает сторону AD в точке F. Найдите периметр параллелограмма, если $AB = 12$ и $AF : FD = 4 : 3$.

Ответ: ________________ .

7. Около окружности описана равнобочная трапеция, средняя линия которой равна 5, а синус острого угла при основании равен $\frac{4}{5}$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: ________________ .

8. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23. Найдите радиус окружности.

Ответ: ________________ .

Ответы

§ 1. Приближённые значения. Округление чисел. Стандартный вид числа

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	3	2	2	3	2	2	17,17
2	3	4	4	3	4	1	1	1
3	4	4	630	1	4	0,5	2	4,1
4	2	3	3	1	2	2	4	4,2
5	3	1	1801	1	1	0,1	4	2
6	3	3	3	3	2	1	4	2

§ 2. Отношения. Пропорции

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	1	2	4	4	1	2	3
2	4	3	1	3	2	3	4	4
3	3	4	3	1	4	2	3	2
4	4	2	4	3	3	1	4	2
5	3	4	2	2	2	2	3	2
6	4	3	4	4	3	4	1	101

§ 3. Проценты

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	1	4	3	3	3	1	2
2	2	3	2	2	2	2	1	3
3	3	4	3	3	4	2	4	2
4	1	2	2	2	1	6	4	15870
5	4	2	2	2	2	4	2	4
6	1	2	4	4	3	2	1	3

§ 4. Арифметические действия. Сравнение чисел

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	3	3	2	1	А – 2; Б – 4; В – 1	4	3
2	1	3	2	3	2	2	4	4
3	3	4	2	3	4	А – 4; Б – 1; В – 2	2	4
4	3	4	2	3	2	А – 3; Б – 1; В – 4	3	2
5	2	1	1	2	4	А – 1; Б – 4; В – 2	4	2
6	2	2	4	3	2	1	2	4

§ 5. Числовые подстановки в буквенные выражения. Формулы

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	1	2	А – 3; Б – 4; В – 1	2	3	3	2
2	4	1	2	1	1	4	2	4
3	3	3	2	А – 2; Б – 4; В – 3	4	3	1	2
4	1	$\pi = \frac{C}{2R}$	4	1	2	3	1	1
5	9	$v = \sqrt{a_{\text{н}} R}$	2	А – 3; Б – 1; В – 4	1	4	2	1
6	1,8	$m = \frac{F}{a}$	4	2	3	3	3	1

§ 6. Буквенные выражения. Область допустимых значений буквенного выражения

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	2	3	$-1; 1$	3	2	А – 2; Б – 3; В – 4
2	4	3	2	4	3	4	2	$(-\infty; 0{,}4]$
3	3	4	3	1	-8; 8	2	4	А – 2; Б – 1; В – 3
4	3	2	2	3	$(1; 2)\cup$ $\cup(2; +\infty)$	2	4	А – 3; Б – 2; В – 4
5	3	3	4	2	-4; 0; 1	4	1	А – 2; Б – 1; В – 4
6	4	4	4	3	2	2	2	2

§ 7. Степень с целым показателем

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	3	2	4	1	3	А – 3; Б – 1; В – 4
2	4	2	2	2	4	3	3	А – 2; Б – 4; В – 1
3	2	2	3	1	3	1	4	А – 4; Б – 2; В – 1
4	2	3	4	3	1	4	1	А – 4; Б – 1; В – 2
5	4	3	1	3	3	2	2	А – 3; Б – 1; В – 2
6	4	2	3	3	1	2	2	А – 3; Б – 1; В – 2

§ 8. Многочлены. Преобразование выражений

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	1	1	3	4	4	А – 1; Б – 3; В – 2
2	2	0	3	4	–16	3	–95	3
3	2	3	1	4	1	3	4	А – 4; Б – 1; В – 3
4	4	4	4	3	4	2	3	1
5	1	4	4	2	2	2	4	3
6	1	3	4	4	1	6	36	4

§ 9. Алгебраические дроби

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$\frac{5}{x}$	3	1	4	2	3	1	$3x$
2	$\frac{x^2-2}{2x}$	1	1	2	1	2	a	$a-4$
3	$\frac{4-3x^2}{x}$	3	2	4	1	2	a	$2x-4$
4	$\frac{x+1}{x}$	1	1	4	3	4	4	$-a$
5	$\frac{1-3x}{3x}$	4	1	3	2	4	3	А – 2; Б – 3; В – 4
6	1	3	3	1	–0,01	24	$3-2x$	–1

§ 10. Квадратные корни

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	3	3	2	3	3	2	7
2	1	4	4	4	4	1	4	4
3	2	3	3	1	4	−2	2	−1
4	2	2	1	1	1	1	3	$x - 2$
5	2	1	3	1	2	1	1	$2x + 1$
6	4	2	2	8	4	4	3	−8

§ 11. Линейные и квадратные уравнения

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	−1; 3	0; 1	2	−0,05	−1	А – 1; Б – 2; В – 3
2	3	3	−4	3	1	0	46,5	А – 2; Б – 1; В – 3
3	2	3	−2	13	4	2	3	А – 2; Б – 1; В – 3
4	1	1	3	4	1	4	3	А – 3; Б – 1; В – 4
5	2	4	−0,25	2	4	1	2	А – 1; Б – 4; В – 2
6	1	−2; 3	1	0; 1,3	0	1	±5; 0	А – 1; Б – 2; В – 3

§ 12. Системы двух уравнений с двумя неизвестными

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	А – 2; Б – 3; В – 1	2	$(3;2)$	3	3	0; $x=2$; $y=-1$	А – 3; Б – 1; В – 4
2	4	А – 2; Б – 3; В – 1	2	$\left(\frac{8}{13};\frac{4}{13}\right)$	2	4	$(-4;-5)$, $(6;5)$	$(1;1)$, $(-1;-1)$
3	2	А – 2; Б – 1; В – 3	4	$(2;2)$	3	2	$(3;1)$, $(9;13)$	$(4;10)$
4	3	3	4	$(1;3)$	1	4	$(3;25)$, $(-3;-17)$	А – 2; Б – 4; В – 1
5	1	2	3	$(-4;6)$	3	–3,2	$(0;3)$, $(-3;0)$	А – 2; Б – 1; В – 4
6	2	2	1	$\left(\frac{1}{4};\frac{1}{3}\right)$	2	1	$(5;70)$, $(-5;-40)$	$(0,5;-5)$

§ 13. Составление математической модели по условию задачи

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	4	1	3	3	1	4	2
2	3	3	3	2400	3	45; 18	1	4
3	3	1	2	11	2	16; 36	2	24
4	2	2	4	4	1	1	4	3
5	1	4	4	2	1	3	2	4
6	11	4	4	150	3	20; 25	4	2,4

§ 14. Неравенства с одной переменной и системы неравенств

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	3	2	4	1	3	4	2	А – 2; Б – 1; В – 3
2	$[3;+\infty)$	3	3	$[-4;2]$	1	$(-\infty;-4]$	4	3
3	$(-\infty;9]$	2	1	$[-1;2]$	2	$(8;+\infty)$	4	2
4	4	2	4	3	1	3	1	2
5	2	4	4	1	2	4	1	А – 4; Б – 3; В – 1
6	$x > \frac{1}{x}$	$(-\infty;0,2)$	1	$(-\infty;0,6]$	1	$[-4;0,5)$	1	2

§ 15. Решение квадратных неравенств. Неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Системы неравенств

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$(-7;3)$	3	1	3	$[-3;7]$	$[-7;-4)$	1	$[-1;1]$
2	4	$(-1;3)$	1	3	$(-1;1)\cup$ $\cup(1;+\infty)$	$[-2;0)$	3	$[-3;-1)$
3	$[-3;2]$	$(-4;0)$	1	4	$(-\infty;-6)\cup$ $\cup(6;+\infty)$	3	4	$\left[-\frac{7}{9};\frac{1}{3}\right)$
4	2	1	4	$-3;\ -2;$ $-1;\ 0;\ 1$	$(-\infty;2]\cup$ $\cup[3;+\infty)$	$(-7;+\infty)$	2	$\left[-4;5\frac{1}{3}\right]$
5	$(-4;1)$	4	3; 4	-4	$(-\infty;-5]\cup$ $\cup[2;+\infty)$	$[-4;8]$	1	$(-5;2{,}5]$
6	1; 2; 3; 4	3	4	6	2	$[0;\sqrt{5}]$	4	$[-5;0]$

§ 16. Числовые последовательности. Арифметическая и геометрическая прогрессии

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	2	3	3	2	4	1	А – 3; Б – 2; В – 4
2	3	4	4	3	4	2	1	А – 1; Б – 3; В – 4
3	1	3	4	2	4	2	1	А – 4; Б – 1; В – 2
4	4	4	3	12	3	225	4	$8+3n$
5	4	3	3	2	3	13	6	21
6	3	2	2	3	20	25	5	17

§ 17. Исследование функции и построение графика

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	4	3	$a > 0$; $c < 0$	1	3	2	А – 3; Б – 2; В – 1
2	2	А – 1; Б – 3; В – 2	1	$(-3; -1) \cup (1; 4]$	3	–4	1	А – 4; Б – 3; В – 1; Г – 2
3	1	А – 1; Б – 4; В – 2; Г – 3	4	$(-3; -1) \cup (2; 4]$	1	–12	2	А – 3; Б – 4; В – 1
4	4	А – 3; Б – 1; В – 4; Г – 2	2	3	2	3	–7	А – 4; Б – 1; В – 2
5	3	А – 1; Б – 3; В – 2	4	3	1	3	1	А – 4; Б – 1; В – 2
6	2	А – 3; Б – 1; В – 2	1	$[-1; 3]$	–2	*В*	6	2

§ 18. Представление данных в виде таблиц, диаграмм и графиков

Вар. №	Номер задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	а) 20; б) 18; в) 50	2	1	А, 30	11	2	A, 10
2	2	1	А = 2; Б = 28; В = 88	2	0,5 с; 22 м; 3,5 с	2	I; 1	II, 10
3	1	а – 2; б – 9; в – 5	2	24	1; 50; 150	3	Б, 5	A, 300
4	8; 2; 0	а) 2 с; б) 35 м; в) 5 с	4	3	а) 10 к; б) 0,1; в) 40%	4	0	x, 2
5	2	а) 50 км/ч; б) 5; в) 100 км/ч	51	13	а) 87,5%; б) $\frac{1}{3}$; в) 1	3	1	75 км/ч
6	2	а) 200 км; б) 4 ч; в) 0	4	2	1991 – 1992	1	3	N, 150

§ 19. Алгебраические уравнения и системы нелинейных уравнений

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	$-1;\ 2$	$\pm\sqrt{2}, \pm 2, \pm 2\sqrt{2}$	3	4	$0;\ 16$	$\frac{x+3}{x-1}$	$\pm\sqrt{2};\ \pm 1$	$(0{,}6; -1{,}4)$; $(0{,}4; -1{,}6)$
2	$-1;\ -2$	$\frac{(x-2)(2x+3)}{x+1}$	4	4	-4	$-1;\ -\frac{3}{5};\ 1$	$(-3;5),\ (5;-7)$	$(-5;2), (2;5)$
3	$1;2;-3$	x^2-x+1	1	-1	$-2;\ 9$	$0;\ 2{,}5$	решений нет	$(2;3;5)$, $(-2;-3;-5)$
4	$1;3;-2$	$x^2+x+1-\frac{4x+5}{x^2+1}$	1	4	$-2;\ 4$	$18;8$	$(1;-2), (-1;2)$, $(-2;1), (2;-1)$	$(3;3)$; $(-3;-3)$
5	$-3;3$	$x^3-6x^2+11x-6$	3	1	-2	$-4;3$	$\left(12-3\sqrt{7};\ \frac{4+\sqrt{7}}{3}\right)$	$(2;5;6)$, $(-2;-5;-6)$
6	$1;\ -3$	$x^2-7x+12$	3	2	$2;\ 9$	-7	$-2;\ 2$	$(1;1), (-1;-1)$

§ 20. Решение иррациональных уравнений и уравнений, содержащих неизвестное под знаком модуля

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	4	0,8	3	3	5	1	0; 1; 2	−2
2	5	3	3	6	−1,6	1	$-\sqrt{5}; \sqrt{5}$	−1
3	15	4	29	16	−4; −0,8	4	$-\sqrt{5}; \sqrt{5}$	12
4	2	3	4	−3	−4; 2	5, 6	1	2
5	−1	2,5	22	−1	$\frac{1}{13}; 1$	−9	−2	2
6	7	3	1	3	1	4	−45	−9

§ 21. Текстовые задачи

Вар.	Номер задания							
№	1	2	3	4	5	6	7	8
1	90	3	57	87,5	75; 25	500	30; 20	48
2	8; 12	3	$22 + 3k$	36	35	80	12; 24	48
3	4; 9	30	36	4; 16	2; 3	14	80; 96	100
4	9	40	20	52	7	9	70	100
5	40	48	25	45	40	2	$\frac{24}{7}$	7
6	78	3	780	50	1 : 3	10	30 и 25	4

§ 22. Задания, содержащие параметр

Вар. №	Номер задания 1	2	3	4	5	6	7	8
1	2	$(-1;0]$	$(-\infty;-2)$	$[3;+\infty)$	$b=4$; $c=4$	$(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$	$-1;\ 0;\ 1;\ 2;\ 3$	$0;1$
2	3	1	$(-\infty;-18]$	$(-\infty;0)$	$(0,5;3)$	$(-\infty;-a]\cup(0;+\infty)$	$(2;+\infty)$	$-1;3$
3	2	$(1;3)$	$\left[-\frac{25}{4};+\infty\right)$	$(-\infty;1)$	$(1;2)$	$(-\infty;12)\cup(14;+\infty)$	$[1;+\infty)$	$-0,5$
4	-5	$(2;4)$	$(-4;4)$	$(-3;7)$	$(2,5;3)$	$(-2;0)\cup(0;2)$	$(2;+\infty)$	$[0;6)$
5	1,6	$[-1;3]$	$(-\infty;-1)$	$(-3;2)$	$1;9$	$(-1;0)\cup(0;9)$	$(-5;1,5)$	$a\in Z$
6	0	$-2\frac{1}{4}$	$(3,125;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$5;6$	$(-\infty;0]\cup[5;+\infty)$	4 при $0<a<9$; 3 при $a=9$; 2 при $a>9$	$0;1$

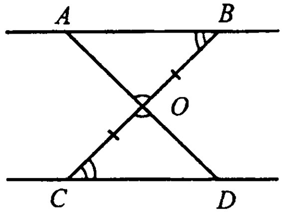
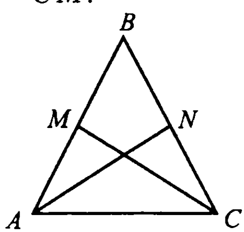
§ 23. Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	496	4	1	4	4	0,3	1	3
2	4	3	2	4	2	0,75	1	2
3	15625	362880	4060	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{10}$	110080	$\frac{1}{3}$
4	124	2520	300	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{14}$	0,92	6010
5	18	11!	210	$\frac{2}{9}$	$\frac{67}{315}$	$\frac{98}{9900}$	450	$\frac{9}{16}$
6	3	3	4	2	1	1	4	2

§ 24. Геометрия

Вар. №	Номер задания							
	1	2	3	4	5	6	7	8
1	22,5	40	2, 4		0,25	4	1,5	8
2	2,25	20	1-А, 2-А, 3-В		12	14	2	3
3	80	90	2		2	14	30	0,75
4	200	50	3		20	3	8	49
5	2	105	3		10	30	40	6
6	45	160	1, 4		25	66	20	17

Ответы к заданиям по геометрии №4

Вариант 1
Доказательство: 1) $\angle AOB = \angle COD$ как противолежащие (см. рис. 163). 2) $\angle ABC = \angle BCD$ как накрестлежащие. 3) $\triangle AOB = \triangle COD$ по второму признаку равенства треугольников ($OB = OC$, $\angle DOC = \angle BOA$, $\angle ABO = \angle OCD$).  Рис. 163
Вариант 2
Доказательство: $\triangle ABN = \triangle CBM$ (см. рис. 164) по первому признаку равенства треугольников ($BN = BM$, $BC = BA$, $\angle B$ — общий), а значит, $AN = CM$.  Рис. 164

Вариант 3

Доказательство:
Известно, что $AB \perp CD$, $AO = OB$, $CO = OD$ (см. рис. 165).
$\triangle AOC = \triangle BOD$ по первому признаку равенству треугольников
($AO = OB$, $CO = OD$, $\angle COA = \angle BOD$). Аналогично $\triangle COB = \triangle AOD$.

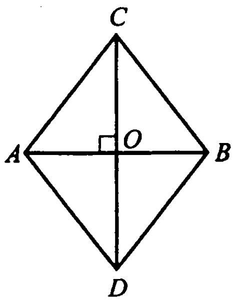


Рис. 165

$\triangle AOC = \triangle COB$ по первому признаку равенства треугольников
($\angle AOC = \angle COB$, OC — общая сторона, $AO = OB$).
Значит, $\triangle AOC = \triangle OCB = \triangle AOD = \triangle BOD$, а потому $AC = BC = AD = BD$, то есть $ABCD$ — ромб.

Вариант 4

Доказательство:
$\triangle ABM = \triangle MCD$ по первому признаку равенства треугольников ($BM = MC$, $CD = AB$, $\angle ABM = \angle MCD$), значит, $AM = MD$.

Вариант 5
Доказательство: Заметим, что $\triangle BMK \sim \triangle BAC$, так как $\angle B$ — общий, а $\frac{BM}{BA} = \frac{BK}{BC}$, значит, $\angle MKB = \angle ACB$, и прямые MK и AC параллельны.
Вариант 6
Доказательство: $\triangle MNK \sim \triangle ABC$, так как все его стороны пропорциональны сторонам треугольника ABC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ как средние линии. Значит, все углы равны.

Литература

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования (Приказ Минобрнауки РФ от 17.12.2010 г. №1897).
2. *Макарычев Ю. Н. и др.* Алгебра. 9 класс.: Учеб. для шк. с углубл. изуч. математики. — М.:Мнемозина, 2010.
3. *Алимов Ш. А. и др.* Алгебра: Учеб. для 9 кл. общеобразоват. учреждений — М.:Просвещение, 2010.
4. *Мордкович А. Г. и др.* Алгебра. 9 класс. — М.:Мнемозина, 2010.
5. *Смирнов В. А. Смирнова И. М.* Геометрия. 7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений. — М.:Мнемозина, 2010.
6. Математика. 9-й класс. Подготовка к ГИА-2013 / Под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. —Ростов-на-Дону: Легион, 2012.
7. *Прокофьев А. А.* Задачи с параметрами. — М.: МИЭТ, 2004. — 258 с.
8. Спецификация экзаменационной работы по алгебре государственной (итоговой) аттестации выпускников IX классов общеобразовательных учреждений (в новой форме) 2012 г. [Электронный ресурс]. — Электрон. текст. дан. — Москва: ФИПИ. — 2011. — Режим доступа: www.fipi.ru, свободный.

ГИА-9

Учебное издание

Лысенко Федор Федорович
Кулабухов Сергей Юрьевич
Евич Людмила Николаевна
Ольховая Людмила Сергеевна

МАТЕМАТИКА. 9 КЛАСС
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ГИА-2013
Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *С. Иванов*
Корректор *М. Федорова*

Подписано в печать с оригинал-макета 07.08.2012.
Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Таймс. Печать газетная. Усл. печ. л. 18,6.
Доп. тираж 20 000 Заказ № 237.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных диапозитивов в ЗАО "Полиграфобъединение". 347900. г. Таганрог. ул. Лесная биржа, 6 В.